

Capítulo 3 - Interferência e difração

Introdução

De forma geral, uma onda pode ser encarada como uma perturbação periódica que se propaga em um meio, material ou não. Esta perturbação pode se uma deformação, um gradiente de pressão, ou um campo (eletromagnético ou gravitacional). Quando duas ou mais ondas de mesmo tipo se sobrepõem no espaço – e esta interação não passa de uma soma – estas perturbações podem se reforçar uma à outra, ou podem se enfraquecer, dependendo das fases das ondas. A esta interação dá-se o nome de *interferência*. Neste capítulo, analisaremos processos de interferência entre ondas ópticas coerentes, para as quais a diferença de fase é sempre bem definida, e pontuaremos algumas importantes aplicações tecnológicas deste fenômeno.

A difração pode ser entendida como um caso particular de interferência, no qual um número infinito de ondas interferem entre si. A luz que se propaga por um determinado meio pode sofrer alterações e divisões em sua frente de onda ao passar por obstáculos, sejam eles opacos (de amplitude) ou transparentes (de fase). As novas frentes de onda decorrentes da passagem da luz por este obstáculo interferem entre si, gerando desvios na sua direção de propagação. Estes desvios foram relatados pela primeira vez pelo italiano Francesco Grimaldi no século XVII, ao observar que sombras produzidas por objetos iluminados por fontes de luz de pequena extensão não tinham contornos tão bem definidos e delineados quanto os previstos pela óptica geométrica. Por este motivo, a difração pode ser prejudicial para a qualidade da imagem de sistemas ópticos de alta complexidade e exigência, como microscópios e telescópios astronômicos. O conhecimento e o domínio do fenômeno de difração permite-nos projetar sistemas ópticos que, se não eliminam seus efeitos deletérios, pelo menos limitam-nos a níveis aceitáveis. Dispositivos baseados em difração, como redes de difração e hologramas, chamados genericamente de elementos difrativos, encontram inúmeras aplicações em óptica e em tecnologia em geral, como instrumentos para a decomposição espectral da luz, formação de imagens, sistemas anti-falsificação, metrologia, entre inúmeras outras aplicações.

3.1 – Linearidade da equação de onda e princípio da superposição

A equação de onda de Maxwell vista no capítulo 1 (eq. 1.8 e 1.9),

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

apresenta a propriedade da linearidade, ou seja, se as funções $E_1(x,t)$, $E_2(x,t)$, ... $E_n(x,t)$ são soluções da equação de onda, então a função

$$E(x,t) = \alpha E_1(x,t) + \beta E_2(x,t) + \dots + \zeta E_n(x,t) \quad (\alpha, \beta, \dots, \zeta \text{ são números reais}) \quad (3.1)$$

também é solução da equação de onda.

Esta propriedade respalda matematicamente a interferência de ondas, como veremos a seguir, e permite que o campo eletromagnético seja expresso na forma exponencial complexa. Neste caso, a equação (1) pode ser particularizada como uma combinação linear de dois campos, $E_1(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t + \phi)$ e $E_2(x,t) = E_0 \text{sen}(kx - \omega t + \phi)$, com coeficientes $\alpha = 1$ e $\beta = i$ ($i \equiv \sqrt{-1}$) respectivamente, de modo a assumir a forma

$$\begin{aligned} E(x,t) &= \alpha E_1(x,t) + \beta E_2(x,t) \\ &= E_0 \cos(kx - \omega t + \phi) + i E_0 \text{sen}(kx - \omega t + \phi) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$E(x,t) = E_0 [\cos(kx - \omega t + \phi) + i \text{sen}(kx - \omega t + \phi)] \quad (3.2)$$

De acordo com a equação (A.7) (v. apêndice no fim do capítulo), a equação (3.2) pode ser reescrita como

$$E(x,t) = E_0 e^{i(kx - \omega t + \phi)} \quad (3.3)$$

Se o campo é exponencial complexo, a equação (1.22) $I = c \varepsilon_0 E_0^2 / 2$ não pode ser usada diretamente para expressar a intensidade da luz, já que a intensidade luminosa deve ser sempre real e positiva, e a aplicação direta desta relação geraria uma intensidade negativa. Para se contornar este problema, a forma mais apropriada para expressar a intensidade da onda torna-se

$$I = c \varepsilon_0 \frac{E^* E}{2} \quad (3.4)$$

Exercício resolvido 1 – mostre que a função de onda do campo elétrico $E(x,t) = E_0 e^{i(kx - \omega t + \phi)}$ de uma onda eletromagnética satisfaz a equação de onda

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Solução:

Assim como se procedeu na seção 1 do capítulo 1 (seção 1.1), obtém-se a segunda derivada da função $E(x,t) = E_0 e^{i(kx - \omega t + \phi)}$ em relação ao espaço, e o mesmo, em relação ao tempo:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = ikE_0 e^{i(kx - \omega t + \phi)} \Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -k^2 E_0 e^{i(kx - \omega t + \phi)} = -k^2 E(x, t)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -i\omega E_0 e^{i(kx - \omega t + \phi)} \Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 e^{i(kx - \omega t + \phi)} = -\omega^2 E(x, t),$$

e substituem-se estes resultados na equação de onda:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \Rightarrow -k^2 E(x, t) = \mu_0 \varepsilon_0 (-\omega^2 E(x, t)) \Rightarrow$$

$$k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2$$

Lembrando que $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$, a relação acima converte-se em

$$k = \frac{\omega}{c}$$

A exemplo do que foi verificado na seção 1.1, o resultado acima indica que, de fato, a função $E(x, t) = E_0 e^{i(kx - \omega t + \phi)}$ pode ser usada para descrever o campo elétrico de uma onda eletromagnética. De forma correspondente, pode-se afirmar que o campo magnético correspondente pode ser dado por

$$B(x, t) = B_0 e^{i(kx - \omega t + \phi)}$$

Exercício resolvido 2 – determine a intensidade da onda cujo campo elétrico é $E(x, t) = E_0 e^{i(kx - \omega t + \phi)}$ através da equação (3.4)

Solução:

Aplicando-se diretamente o campo elétrico à relação (3.4), obtém-se

$$I = c \frac{\varepsilon_0 E(x, t)^* E(x, t)}{2} = c \frac{\varepsilon_0 E_0 e^{-i(kx - \omega t + \phi)} E_0 e^{i(kx - \omega t + \phi)}}{2} \Rightarrow$$

$$I = c \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$$

Note que, conforme esperado, o resultado é idêntico ao da equação (1.22)

3.2 Interferência - fenômenos de interferência de luz e aplicações.

Considere-se a interação de duas ondas planas e monocromáticas 1 e 2, de mesma polarização, que se propagam ao longo da direção z, expressas pelos seus respectivos campos elétricos:

$$E_1 = E_{01} e^{i(kz - \omega t - \phi_1)} \quad (3.5a)$$

e

$$E_2 = E_{02} e^{i(kz - \omega t - \phi_2)} \quad , \quad (3.5b)$$

sendo E_{01} e E_{02} amplitudes reais.

A interferência destas duas ondas resulta numa onda cujo campo elétrico é dado pela soma de E_1 e E_2

$$E = E_1 + E_2 = e^{i(kz - \omega t)} (E_{01} e^{i\phi_1} + E_{02} e^{i\phi_2}) \quad (3.6)$$

A intensidade da onda resultante será escrita, de acordo com a equação (3.4), por

$$I = \frac{c\epsilon_0}{2} E^* E = \frac{c\epsilon_0}{2} e^{-i(kz - \omega t)} (E_{01} e^{-i\phi_1} + E_{02} e^{-i\phi_2}) \times e^{i(kz - \omega t)} (E_{01} e^{i\phi_1} + E_{02} e^{i\phi_2}) \Rightarrow$$

$$I = \frac{c\epsilon_0}{2} (E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos \phi)$$

onde $\phi = \phi_2 - \phi_1$. Fazendo $I_{1(2)} \equiv \frac{c\epsilon_0}{2} E_{01(2)}^2$, escreve-se a expressão para a intensidade da luz que resulta da interferência como

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \phi \quad (3.7)$$

No caso particular em que ambas as ondas interferentes possuem a mesma amplitude e, portanto, a mesma intensidade, a equação (3) toma a forma:

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad , \quad (3.8)$$

onde I_0 é a intensidade de cada onda, tal que $I_0 = I_1 = I_2$. A equação (3.8) foi obtida valendo-se da identidade trigonométrica $\cos^2(\phi/2) = (1 - \cos \phi)/2$.

As diferenças de fase para as quais a interferência é construtiva são obtidas impondo-se que a intensidade da equação (4) seja máxima, ou seja, para $\cos^2(\phi/2) = 1$, o que leva aos valores

$$\phi = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots = 2m\pi \text{ rad } (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.9)$$

Onde o número inteiro m é a chamada *ordem de interferência*. Como as funções senoidais têm periodicidade 2π , os valores de fase da expressão (3.9) acima equivalem à condição na qual as duas ondas interferentes estão *em fase*. Nesta situação, os picos das duas ondas se sobrepõem, o mesmo ocorrendo com os vales. A interferência construtiva entre duas ondas de mesma amplitude está esquematicamente mostrada na figura 1.

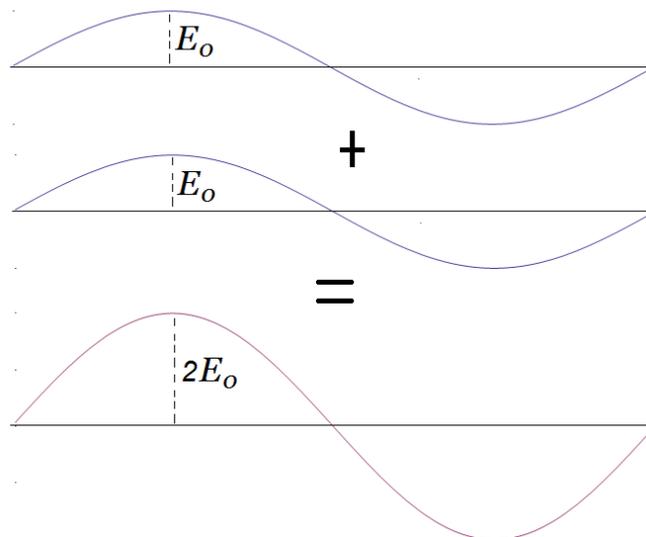


Figura 3.1

Quando a interferência entre as ondas é *destrutiva*, a intensidade da luz resultante é nula, de forma que, impondo-se a condição $\cos^2(\phi/2) = 0$, obtém-se

$$\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots = (2m-1)\pi \text{ rad} \quad (3.10)$$

A condição acima ocorre quando as ondas estão *em contrafase*, como mostrado na figura 2, em que os picos se sobrepõem aos vales, gerando interferência destrutiva. Os fenômenos de interferência construtiva e destrutiva permeiam praticamente toda a análise dos interferômetros, como será visto mais adiante.

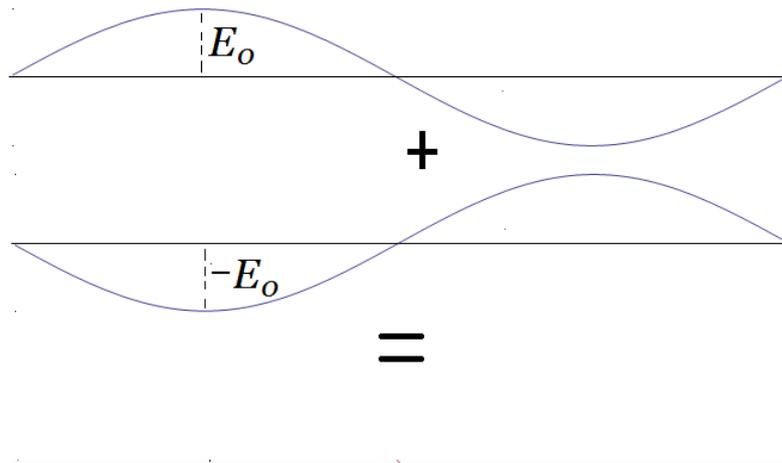


Figura 3.2

A figura 3 mostra a intensidade luminosa, resultado da interferência entre ondas de mesma amplitude, em função da diferença de fase ϕ .

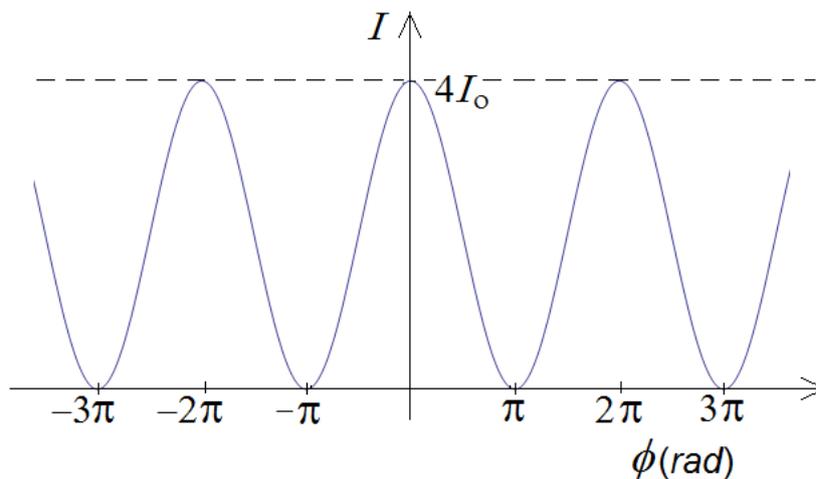


Figura 3.3: Padrão cosseno-quadrado decorrente da interferência de duas ondas planas monocromáticas de mesma frequência propagando-se ao longo da mesma direção.

Exercício resolvido 3 – Considere a interferência de duas ondas monocromáticas de mesma frequência, propagando-se ao longo do eixo x , sentido positivo, dadas por $E_1 = E_0 e^{i(kx - \omega t)} e^{i\delta_1}$ e $E_2 = 3E_0 e^{i(kx - \omega t)} e^{i\delta_2}$.

a - Calcule a intensidade resultante da interferência em função da diferença de fase δ entre ambas as ondas;

b – Determine os valores de diferença de fase para os quais a interferência é construtiva e destrutiva;

c - esboce o gráfico da intensidade luminosa em função de δ ;

Solução:

a - A interferência das ondas E_1 e E_2 será

$$E = E_1 + E_2 = E_0 e^{i(kx - \omega t)} (e^{i\delta_1} + 3e^{i\delta_2})$$

De acordo com a eq. (3.4), a intensidade será escrita como

$$I = \frac{c\epsilon_0}{2} E^* E = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0 e^{-i(kx - \omega t)} (e^{-i\delta_1} + 3e^{-i\delta_2}) \times E_0 e^{i(kx - \omega t)} (e^{i\delta_1} + 3e^{i\delta_2}) \Rightarrow$$

$$I = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2 (1 + 3e^{i(\delta_2 - \delta_1)} + 3e^{-i(\delta_2 - \delta_1)} + 9)$$

Fazendo $\delta = \delta_2 - \delta_1$ e $I_0 \equiv \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2$, e agrupando-se convenientemente os termos da relação acima, tem-se a expressão para a intensidade da luz:

$$I = I_0 (10 + 6 \cos \delta)$$

b – Nota-se pela relação acima que os mínimos de interferência não terão intensidade nula. Isto decorre do fato de que as ondas interferentes não têm a mesma amplitude. Observando-se a expressão para a intensidade com cuidado, conclui-se que os mínimos de interferência ocorrem quando $\cos \delta = -1$, tais que

$$I_{\min} = I_0 (10 + 6 \cos \delta) = 4I_0$$

Os valores de diferença de fase que levam a este resultado são

$$\delta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots = (2m-1)\pi \text{ (rad)}$$

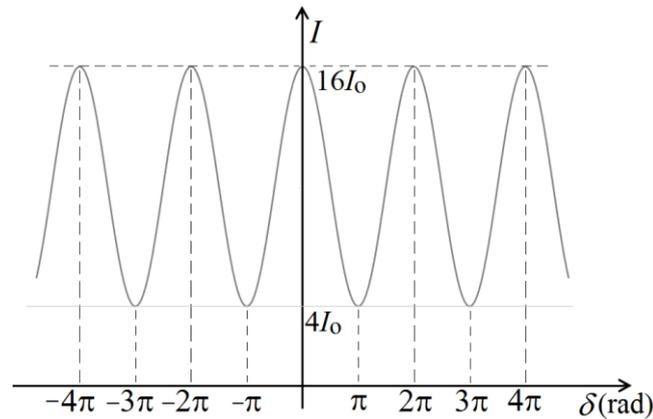
Os máximos de interferência são obtidos impondo-se que $\cos \delta = 1$, de modo que

$$I_{\max} = I_0 (10 + 6 \cos \delta) = 16I_0,$$

que são obtidos pelos valores

$$\delta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots = 2m\pi \text{ (rad)}$$

Assim, o gráfico da intensidade da luz que resulta da interferência das duas ondas é mostrado abaixo:



Caminho óptico - O caminho óptico é um parâmetro fundamental para o estudo de fenômenos de interferência. Sua definição é uma consequência da equação (2.3), pela qual conclui-se que os comprimentos de onda da luz no vácuo (λ_0) e num meio de índice de refração n (λ) relacionam-se pela equação $\lambda_0 = \lambda n$. O caminho óptico Γ da luz ao propagar-se por este meio de comprimento d é então dado por:

$$\Gamma = nd \quad (3.11)$$

3.2.1 - Experiência de fenda dupla de Young – realizada em 1805 pelo cientista britânico Thomas Young, esta é considerada uma das experiências da Física mais importantes de todos os tempos, não só por demonstrar o caráter ondulatório da luz, mas também por permitir a análise do comportamento quântico de partículas e do princípio de incerteza de Heisenberg.

No arranjo experimental, luz com frente de onda plana incide sobre um par de fendas paralelas, de modo que cada fenda torna-se então uma fonte secundária de luz. As ondas emitidas por estas fontes são coerentes, sofrendo assim interferência. O padrão de interferência resultante pode então ser projetado num anteparo. A constatação de que a luz sofre interferência fornece a imediata conclusão de que ela tem comportamento ondulatório.

A experiência, extremamente simples, está esquematizada – fora de escala, para permitir a visualização de todos os itens – na figura 3.4. A distância entre as fendas é d e a distância entre elas e o anteparo é L . Conforme o sistema de coordenadas mostrado na figura, as fendas estão dispostas ao longo da direção z , as ondas emitidas pelas fendas A e B propagam-se no plano xy e o anteparo é paralelo ao plano yz .

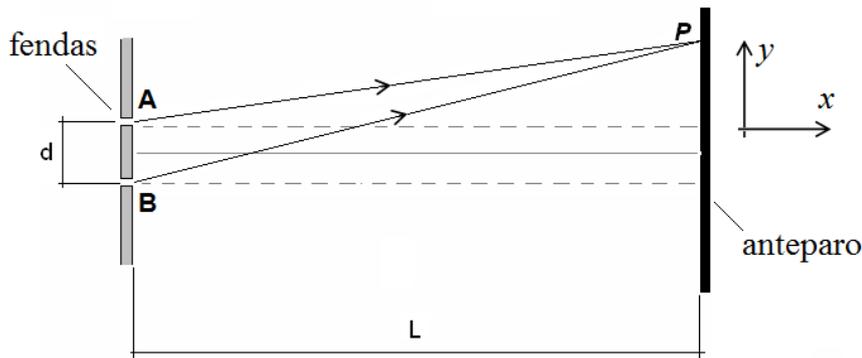


Fig. 3.4

Tipicamente, a distância d entre as fendas é muito menor que a distância L entre as fendas e o anteparo, tal que $L \cong 10^4 d$. A figura 3.5a mostra o detalhe das fendas do arranjo com duas ondas em fase, formando uma frente de onda plana, incidindo sobre as fendas A e B. De acordo com o princípio de Huygens, cada fenda dá origem a inúmeras ondas que se propagam em direções divergentes. A figura mostra duas ondas que emergem de A e de B e que interferem no ponto P no anteparo – e, portanto, no infinito, já que $L \gg d$. Estas ondas têm direções de propagação paralelas, sob um ângulo θ em relação ao eixo x . Para comparar os caminhos percorridos pelas ondas, traça-se uma linha pontilhada QQ' perpendicularmente às direções de propagação das ondas. Observando-se a figura, vê-se que a onda vinda da fenda B percorre o segmento BA' a mais do que a onda originada da fenda A. Este segmento é a *diferença de caminho óptico* Γ entre as ondas. A partir do triângulo retângulo $AA'B$, detalhado na figura 3.5b, obtém-se Γ como

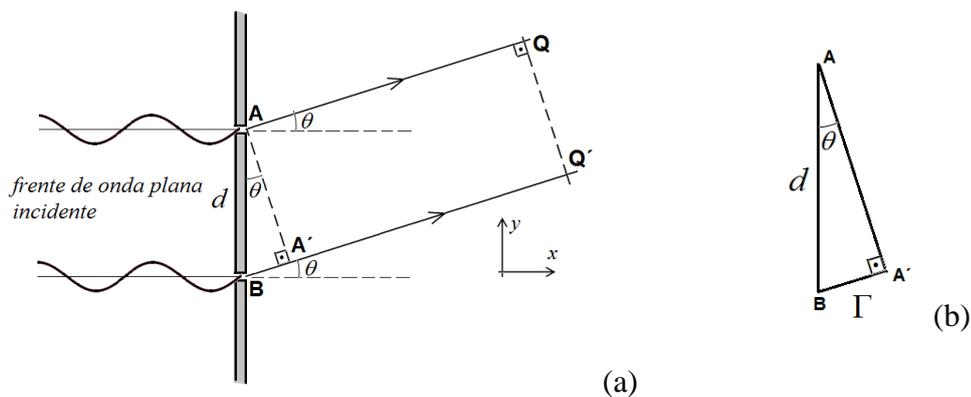


Figura 3.5

$$\Gamma = d \sin \theta \quad (3.12)$$

A interferência é *construtiva* em P (máximo de interferência) quando a diferença de caminho óptico entre as ondas é um múltiplo inteiro do comprimento de onda:

$$d \sin \theta = m \lambda, \quad (3.13)$$

onde $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Se a diferença de caminho óptico é um múltiplo semi-inteiro do comprimento de onda ($\lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2, 7\lambda/2, \dots$), observa-se interferência *destrutiva* (mínimo de interferência):

$$d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda \quad (3.14)$$

O ângulo θ é muito pequeno, e portanto difícil de medir por goniômetros convencionais. Ele pode ser obtido indiretamente, medindo-se a posição Y dos máximos ou mínimos de interferência projetados em um anteparo a uma distância L da fenda dupla. A figura 3.6 mostra uma configuração mais realista do arranjo, com as ondas que emanam de A e B praticamente paralelas. Os pontos O, P e a fenda dupla definem um triângulo retângulo de catetos Y e L , de forma que $\tan \theta = Y/L$. Como o ângulo é pequeno, admite-se a aproximação $\sin \theta \cong Y/L$. Substituindo-se esta relação nas equações (3.13) e (3.14), obtêm-se as condições mais usuais para interferência construtiva e destrutiva pelo arranjo de Young:

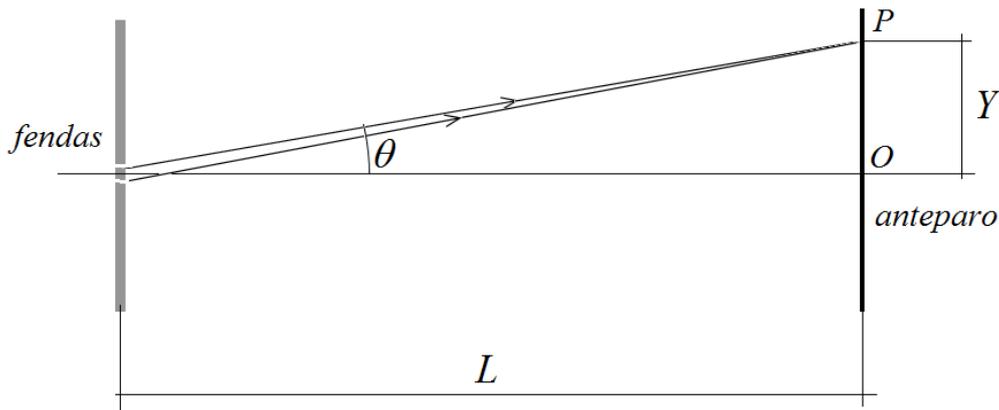


Figura 3.6

$$\frac{Yd}{L} = m\lambda, \quad (3.15)$$

$$\frac{Yd}{L} = \left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda \quad (3.16)$$

O resultado da interferência entre as duas ondas projetada no anteparo é a alternância de máximos e mínimos de interferência, o chamado *padrão de interferência* ou *padrão de franjas*. Como a interferência ocorre não somente no anteparo, mas em todo o espaço, as regiões de interferência construtiva ou destrutiva geram hipérbolos no

plano xy , e franjas retas e paralelas são projetadas no anteparo, como mostra a figura 3.7.

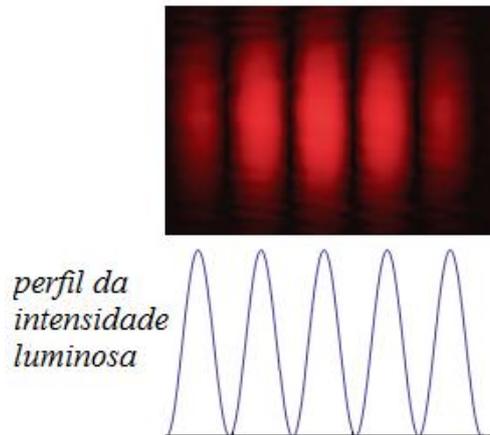


Figura 3.7

3.2.2 - Interferência em filmes finos

A interferência em filmes finos ocorre devido ao processo de múltiplas reflexões internas que ocorre quando luz incide sobre uma película transparente. Numa definição não muito rigorosa, podemos entender filme fino como tendo uma espessura comparável ao comprimento de onda da luz.

A figura 3.8 ilustra o processo de múltiplas reflexões internas. Uma onda luminosa, cuja direção de propagação é representada pelo raio da figura, incide sobre a face superior, sendo parcialmente refletida, e parcialmente transmitida. Esta parcela em particular passa a ser sucessivamente refletida e transmitida pela faces internas do filme. Como cada onda descreve um caminho óptico diferente das demais, as ondas que emergem das faces possuem diferentes fases, podendo portanto interferir construtiva ou destrutivamente.

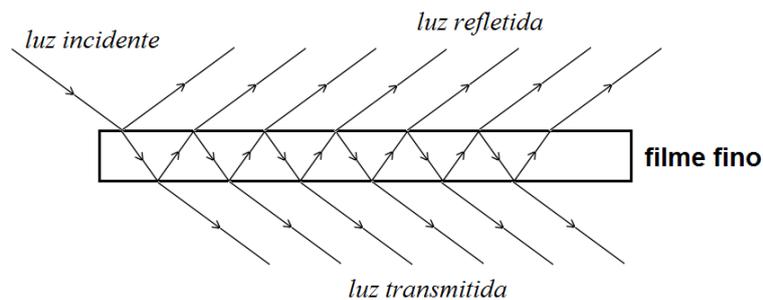


Figura 3.8

Devido a estes vários eventos de reflexão e transmissão, convém definirmos os *coeficientes de reflexão e transmissão* r e t . Considerando a incidência de luz em uma interface dielétrica (por exemplo, ar/vidro, vácuo/vidro, ar/água, etc), o coeficiente de reflexão é a razão entre a amplitude E_R do campo elétrico da luz refletida e a amplitude E_0 do campo elétrico da luz incidente:

$$r = \frac{E_R}{E_0} \quad (3.17)$$

O número r pode ser complexo, já que tanto E_R quanto E_0 também podem sê-lo. Ainda considerando esta mesma luz incidente sobre a interface dielétrica, é também conveniente definir a *refletividade* ou *reflectância* R , como a razão entre a intensidade I_R da luz refletida e a intensidade I_0 da luz incidente:

$$R = \frac{I_R}{I_0} \quad (3.18)$$

A relação entre as grandezas r e R pode ser estabelecida com o auxílio da equação (3.4):

$$R = \frac{I_R}{I_0} = \frac{c\varepsilon_0/2 E_R^* E_R}{c\varepsilon_0/2 E_0^* E_0} = \left(\frac{E_R}{E_0} \right)^* \left(\frac{E_R}{E_0} \right)$$

Note que os termos entre parênteses representam o coeficiente de reflexão e o seu respectivo complexo conjugado. Com o auxílio da equação (3.18), escreve-se então

$$R = r^* r = |r|^2 \quad (3.19)$$

Se E_T é a amplitude do campo elétrico da luz transmitida e I_T a intensidade desta onda, define-se o coeficiente de transmissão t e a transmitância T como

$$t = \frac{E_T}{E_0} \quad (3.20)$$

$$T = \frac{I_T}{I_0} \quad (3.21)$$

procede-se de forma análoga ao raciocínio para a luz refletida para se estabelecer a relação entre t e T :

$$T = t^* t = |t|^2 \quad (3.22)$$

Note, pelas relações (3.19) e (3.22), que R e T são grandezas positivas e reais, portanto, passíveis de serem medidas. Se o material é transparente à luz incidente, ou seja, se a luz não é absorvida, devemos considerar que a energia se conserva num processo de luz incidente sobre uma interface dielétrica. Desta forma, a luz que não é refletida, será certamente transmitida. Isto se traduz a

$$R + T = 1 \quad (3.23)$$

Consideremos agora a incidência de uma onda eletromagnética plana sobre um filme fino como de espessura d e índice de refração n . Ao incidir sobre o filme, parte da onda é refletida por face superior e parte é refratada. Esta parcela refratada sofre múltiplas reflexões no interior do filme, e a cada vez que a onda atinge uma das superfícies, também é parcialmente transmitida.

Quando a onda de amplitude E_0 atinge a face superior - ponto O mostrado na figura 3.9, a parcela transmitida tem amplitude $E_T = tE_0$, de acordo com a equação (3.20) ; ao atingir a face inferior (ponto A), esta parcela é parcialmente transmitida com amplitude t^2E_0 , e parcialmente refletida de volta ao interior do filme com amplitude rtE_0 . Desta forma, os sucessivos processos de transmissão e reflexão pelas faces do filme correspondem respectivamente à multiplicação da amplitude incidente pelos coeficientes de transmissão e de reflexão. As ondas que emergem do filme fino estão representadas na figura 3.9. Entre uma onda emergente e sua consecutiva, há o acréscimo da diferença de fase δ , a ser determinado adiante.

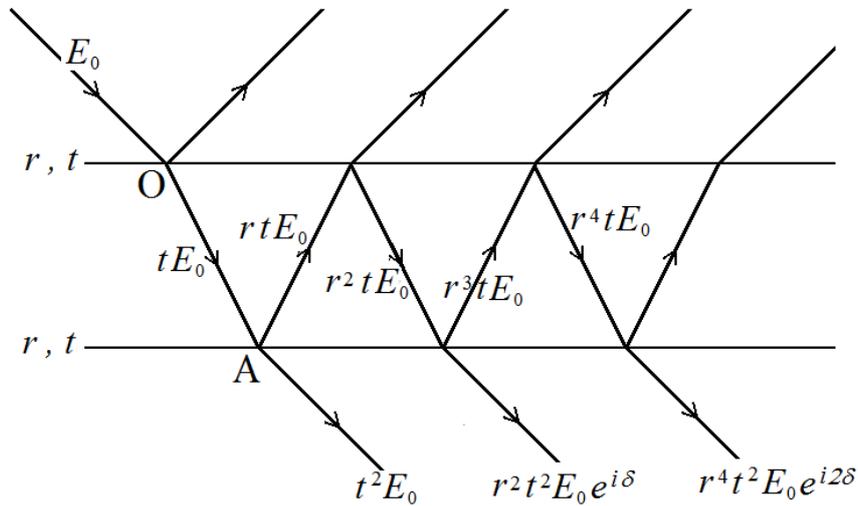


Figura 3.9

O campo elétrico da onda transmitida total E_T através do filme fino é fruto da contribuição de todas as ondas emergentes, sendo dado por

$$\begin{aligned}
 E_T &= E_0 t^2 \left(1 + r^2 e^{i\delta} + r^4 e^{i2\delta} + r^6 e^{i3\delta} + r^8 e^{i4\delta} + \dots \right) e^{i(kz - \omega t)} \\
 &= E_0 t^2 e^{i(kz - \omega t)} \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} e^{in\delta}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Note que, na equação acima, foi incluído o termo $e^{i(kz - \omega t)}$, que indica que a luz transmitida se propaga ao longo da direção z , sentido positivo. A série da equação (3.24) é a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica de razão $r^2 e^{i\delta}$, cujo primeiro termo é 1. Desta forma, esta equação pode ser reescrita como

$$E_T = E_0 \frac{t^2}{1-r^2} e^{i(kz-\omega t)} \quad (3.25)$$

A intensidade da onda transmitida será, de acordo com a relação (3.4),

$$I_T = \frac{c\varepsilon_0}{2} E_T^* E_T = \frac{c\varepsilon_0}{2} E_0^2 \frac{t^4}{1-2r^2 \cos \delta + r^2}, \quad (3.26)$$

onde $I_0 \equiv \frac{c\varepsilon_0}{2} E_0^2$ é a intensidade da luz incidente. A partir das equações (3.17) e (3.20), equação (3.26) toma a forma

$$I_T = \frac{T^2}{1-2R \cos \delta + R^2} I_0, \quad (3.27)$$

onde $T = t^2$ e $R = r^2$ são respectivamente a transmitância e a reflectância do material. Neste caso particular, consideramos r e t reais.

A partir da equação (3.27) pode-se determinar a intensidade da onda refletida total I_R pelo filme fino. Considerando-se que o material do filme não absorve a luz incidente, a energia luminosa se conserva, de modo que a soma das intensidades da luz transmitida e da luz refletida pode ser escrita como

$$I_0 = I_T + I_R \Rightarrow I_R = I_0 - \frac{T^2}{1-2R \cos \delta + R^2} I_0 \quad (3.28)$$

Após um pouco de álgebra, e usando a relação $R + T = 1$, da equação (21) chega-se à seguinte expressão para I_R :

$$I_R = \frac{4R \operatorname{sen}^2(\delta/2)}{1-2R \cos \delta + R^2} I_0 \quad (3.29)$$

A diferença de fase δ entre duas ondas consecutivas pode ser determinada calculando-se a diferença de caminho óptico entre tais ondas, o que pode ser feito com o auxílio da figura 3.10: a onda que incidiu na face inferior no ponto A deu origem às ondas emergentes 1 e 2. Neste ponto A ambas as ondas tinham a mesma fase, mas nota-se que quando as ondas emergem do filme, ambas percorrem caminhos claramente distintos, sendo maior o percorrido pela onda 2. Pela figura pode-se observar que, enquanto a onda 1 percorre o caminho AD, a onda 2 vai de A até C, passando pelo ponto B. Assim, o caminho óptico da onda 2 é dado por $\Gamma_2 = n(AB + BC)$. Como $\overline{AB} = \overline{BC} = d/\cos \theta'$, Γ_2 pode ser dado pela expressão

$$\Gamma_2 = \frac{2nd}{\cos \theta'} \quad (3.30)$$

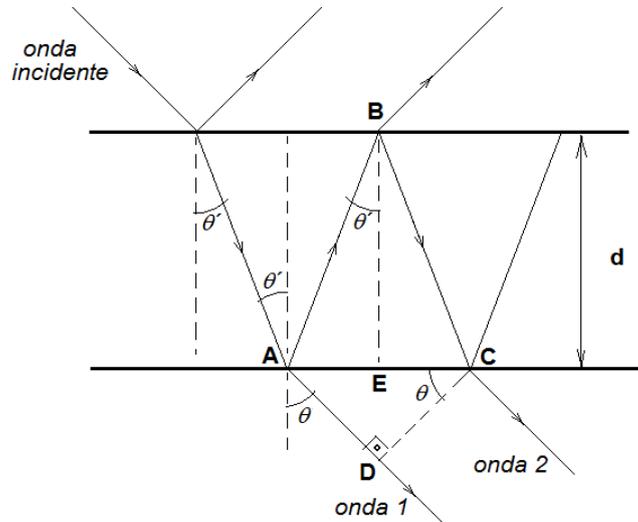


Figura 3.10

O caminho AD é determinado sabendo-se que no vértice C do triângulo retângulo ADC o ângulo é igual a θ . Por este triângulo, tem-se que $\text{sen} \theta = AD/AC$. O segmento AC por sua vez é obtido da relação $AC = 2AE = 2d \text{tg} \theta'$. Desta forma, o caminho óptico Γ_1 é escrito como

$$\Gamma_1 = AD = AC \text{sen} \theta = 2AE \text{sen} \theta = 2d \text{tg} \theta' \text{sen} \theta \quad (3.31)$$

Os ângulos de incidência e de refração relacionam-se pela Lei de Snell $\text{sen} \theta = n \text{sen} \theta'$ (considerando-se que o meio que circunda o filme fino é vácuo ou ar), de modo que Γ_1 é dado por

$$\Gamma_1 = 2nd \frac{\text{sen}^2 \theta'}{\cos \theta'} \quad (3.32)$$

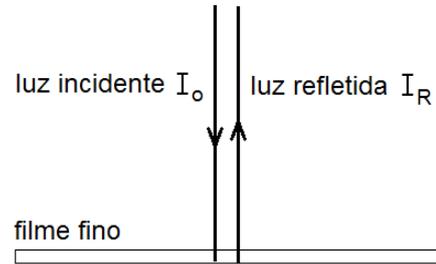
Como a diferença de fase entre as duas ondas que emergem do filme é dada por $\delta = (2\pi/\lambda)(\Gamma_2 - \Gamma_1)$, combinando-se as equações (3.30) e (3.32) obtém-se a relação

$$\delta = \frac{4\pi n}{\lambda} d \cos \theta' \quad (3.33)$$

Exercício resolvido 4 -

Deseja-se evaporar um filme dielétrico sobre uma placa de vidro BK7, de índice de refração 1,513. O material dielétrico que compõe o filme tem índice de refração 1,7.

a - Calcule a menor espessura do filme para que este seja anti-refletor para a luz amarela ($\lambda = 580$ nm) sob incidência normal (v. figura ao lado); b - se o filme dielétrico usado é o de menor espessura, calcule o comprimento da onda λ' que sofrerá máxima reflexão por este filme.



Solução:

a - se o filme deve ser anti-refletor para a luz amarela, a intensidade da luz refletida deve ser nula, ou seja, $I_R = 0$. Pela equação (3.29), esta condição pode ser satisfeita impondo-se que

$$\text{sen}^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0$$

Desta forma, os valores da fase $\delta/2$ que satisfazem a equação acima serão

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{2} &= \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi \dots \Rightarrow, \text{ para } m = 1, 2, 3, 4, \dots \\ \delta &= 2m\pi \end{aligned}$$

Sabemos que a fase, no caso de incidência normal, é dada por $\delta = 4\pi n_1 d / \lambda$

$$\delta = \frac{4\pi n_1 d}{\lambda} = 2m\pi \Rightarrow$$

$$d = m \frac{\lambda}{2n_1}$$

Nota-se, pelo resultado acima, que a espessura do dielétrico, neste caso, depende da ordem m , que, como já vimos, é um número inteiro. Para $\lambda = 580$ nm e $n_1 = 1,7$, temos

$$d_1 = 170,6 \text{ nm}$$

b - se a reflexão sofrida pela onda será máxima, vale a impor a condição

$$\text{sen}^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 1 \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) = \pm 1,$$

satisfeita pelos valores de fase

$$\frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \dots \Rightarrow \delta = (2m-1)\pi$$

A fase entre duas ondas consecutivas emergindo do filme é dada agora em função da espessura $d_1 = 170,6$ nm. Igualando-se então a fase $\delta = 4\pi n d_1 / \lambda'$, ao valor obtido acima, chega-se a

$$\frac{4\pi n_1 d_1}{\lambda'} = (2m-1)\pi \Rightarrow$$

$$\lambda' = \frac{4n d_1}{(2m-1)} = \frac{1032,5}{(2m-1)} \text{ nm}$$

Pela relação acima, nota-se que não há apenas uma onda que sofrerá máxima reflexão pelo filme, mas um grupo delas, cujos comprimentos de onda dependem da ordem m . Atribuindo-se os valores $m = 1, 2, 3, 4, \dots$ à expressão acima para o comprimento de onda, escrevemos os três primeiros comprimentos de onda:

$$\lambda'_1 = 1032,5 \text{ nm} \quad (\text{infravermelho})$$

$$\lambda'_2 = 344,2 \text{ nm} \quad (\text{ultravioleta})$$

$$\lambda'_3 = 206,5 \text{ nm} \quad (\text{ultravioleta})$$

3.3 - Difração

Segundo os princípios da óptica geométrica, a luz apenas se desvia da sua trajetória em linha reta ao sofrer refração ou reflexão. Na ausência destes dois fenômenos, a propagação da luz seria invariavelmente retilínea. Entretanto, desde o século XVII sabe-se que a luz pode sofrer desvios ao passar por determinados obstáculos, em situações que não envolvem reflexão ou refração. Entenda-se como obstáculo qualquer descontinuidade no meio por onde a luz se propaga, sejam obstáculos de amplitude, caracterizados por elementos ou corpos que absorvem a luz total ou parcialmente, sejam obstáculos de fase, como regiões que apresentam qualquer descontinuidade no índice de refração do meio. Estes desvios foram relatados pela primeira vez pelo italiano Francesco Grimaldi, ao observar que sombras produzidas por objetos iluminados por fontes de luz de pequena extensão não tinham contornos tão bem definidos e delineados quanto os previstos pela óptica geométrica.

No capítulo 1, vimos que a óptica geométrica limita-se a descrever a propagação da luz, não levando em conta qualquer efeito ondulatório. De acordo com esta descrição, um feixe de luz colimado que passa através de um furo produz num anteparo uma

região iluminada de bordas bem definidas, de tamanho e forma idênticos aos do furo, independentemente do tamanho deste, como mostrado na figura 1a. De fato, nossa experiência cotidiana nos diz que o que ocorre com a luz ao passar por um furo de alguns centímetros de diâmetro não difere apreciavelmente do previsto por traçado de raios. Porém, se fizermos um feixe de luz passar por um furo bem pequeno feito por uma ponta de compasso pontiaguda num pedaço de cartolina, veremos que a região iluminada do anteparo colocado atrás do furo será visivelmente maior do que o seu diâmetro - como mostrado na figura 1b - e este efeito será mais pronunciado quanto maior for a distância entre o furo e o anteparo. Além disso, quando o furo ou qualquer obstáculo de amplitude são iluminados por uma fonte de luz coerente, os contornos de suas sombras surgem no anteparo cercados de franjas de interferência, mostradas na figura 2.

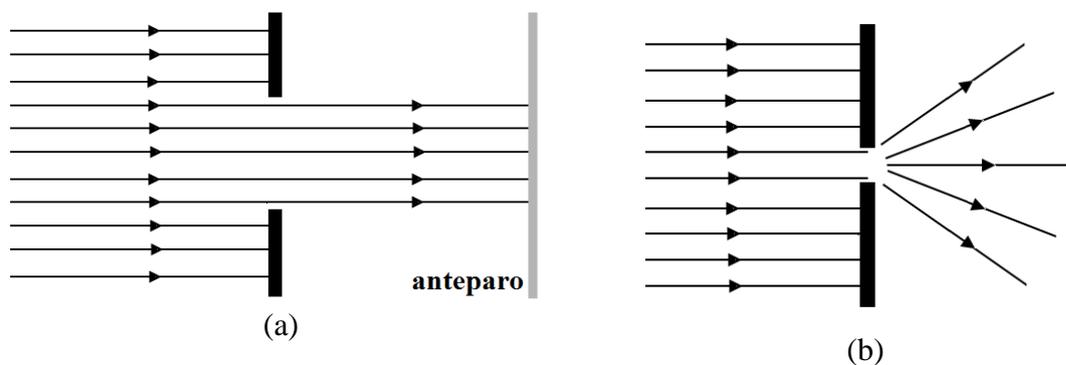


Figura 3.11

A esta classe ou conjunto de fenômenos dá-se o nome de difração. A difração é um fenômeno ondulatório, tradicionalmente tratado como um caso particular de interferência. Este tratamento diferente deve-se ao fato de a difração envolver a interferência de infinitas ondas cujas fases variam continuamente, ao passo que, em processos abordados tradicionalmente como de interferência, as fases das ondas variam de forma discreta, como se vê na experiência de Young, em interferômetros em geral, e em filmes finos.

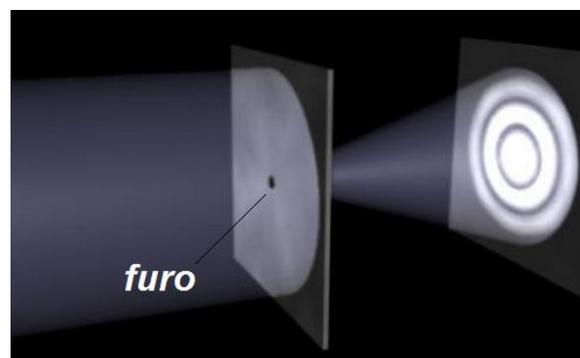


Figura 3.12

Existem basicamente dois tipos de difração de luz no que concerne à forma da frente de onda que interage com o obstáculo: a difração de Fraunhofer, e a difração de

Fresnel. Na primeira, a fonte de luz, o obstáculo e o observador estão distantes entre si o suficiente para que a frente de onda que interage com o obstáculo seja plana, e a luz difratada que atinge um observador também seja composta de frentes de onda plana, como esquematizado na figura 3a. Na segunda, a fonte luminosa e o observador encontram-se próximos o bastante do obstáculo para que se trate da interação de frentes de onda esférica, como mostra a figura 3b. A difração de Fraunhofer engloba uma série de importantes fenômenos ondulatórios e encontra inúmeras aplicações em espectroscopia e processamento de imagens, e a difração de Fresnel é muito utilizada na formulação matemática da holografia digital.

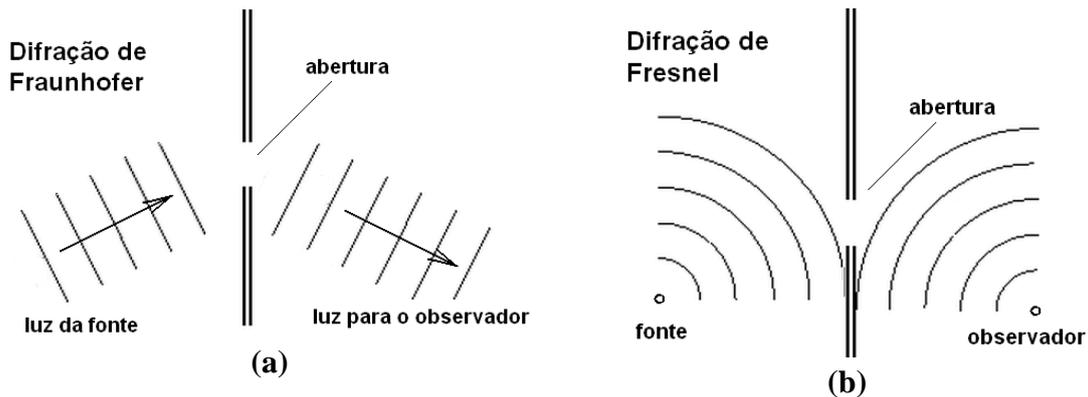


Figura 3.13

3.3.1 - Difração de Fraunhofer

Por fenda simples - Seja uma onda de frente plana e comprimento λ incidindo sobre uma fenda de abertura b , como mostra a figura 3.14. De acordo com o princípio de Huygens, a frente de onda pode ser composta de infinitos pontos emissores de frentes de onda esféricas. A partir da região da abertura, estes pontos emitem, em princípio, ondas em todas as direções possíveis à direita da fenda. Analisemos a interferência de infinitas ondas originadas na fenda, que incidirão num ponto P de um anteparo colocado a uma distância L desta fenda, e que tem um ângulo de elevação θ em relação à horizontal. Se $L \gg b$, pode-se considerar que as ondas que atingem P têm direções de propagação paralelas, formando frentes de onda plana. A figura 4b ilustra uma situação hipotética na qual apenas cinco fontes pontuais (A, B, C, D e E) emitem luz a partir da fenda, onde ($x = 0$) todas as ondas tem a mesma fase – à qual atribuímos um valor nulo para $x = 0$ – e a mesma amplitude E_0 . Por esta figura, vê-se que $\Gamma = y \text{sen} \theta$ é a diferença de caminho óptico entre duas ondas consecutivas, onde y é a distancia no eixo vertical entre duas fontes vizinhas. Assim, se estabelecermos que a fonte A tem fase zero, as fases das demais ondas que emergem da fenda serão $k y \text{sen} \theta$, $2k y \text{sen} \theta$, $3k y \text{sen} \theta$ e $4k y \text{sen} \theta$. Desta forma, se cada onda tiver amplitude E_0 , o campo elétrico total no ponto P será a contribuição de todos os campos oriundos da fenda:

$$E = E_0(1 + e^{i k y \text{sen} \theta} + e^{i 2k y \text{sen} \theta} + e^{i 3k y \text{sen} \theta} + e^{i 4k y \text{sen} \theta}) e^{i(\omega t + \phi)}, \quad (3.34)$$

onde ϕ é o acréscimo de fase experimentado por cada uma das ondas entre plano definido pelo segmento A'E, mostrado na figura 4c, e o ponto P no anteparo. Este acréscimo de fase, por ser comum a *todas* as ondas que emergem da fenda, não é determinante para o resultado a luz difratada em P.

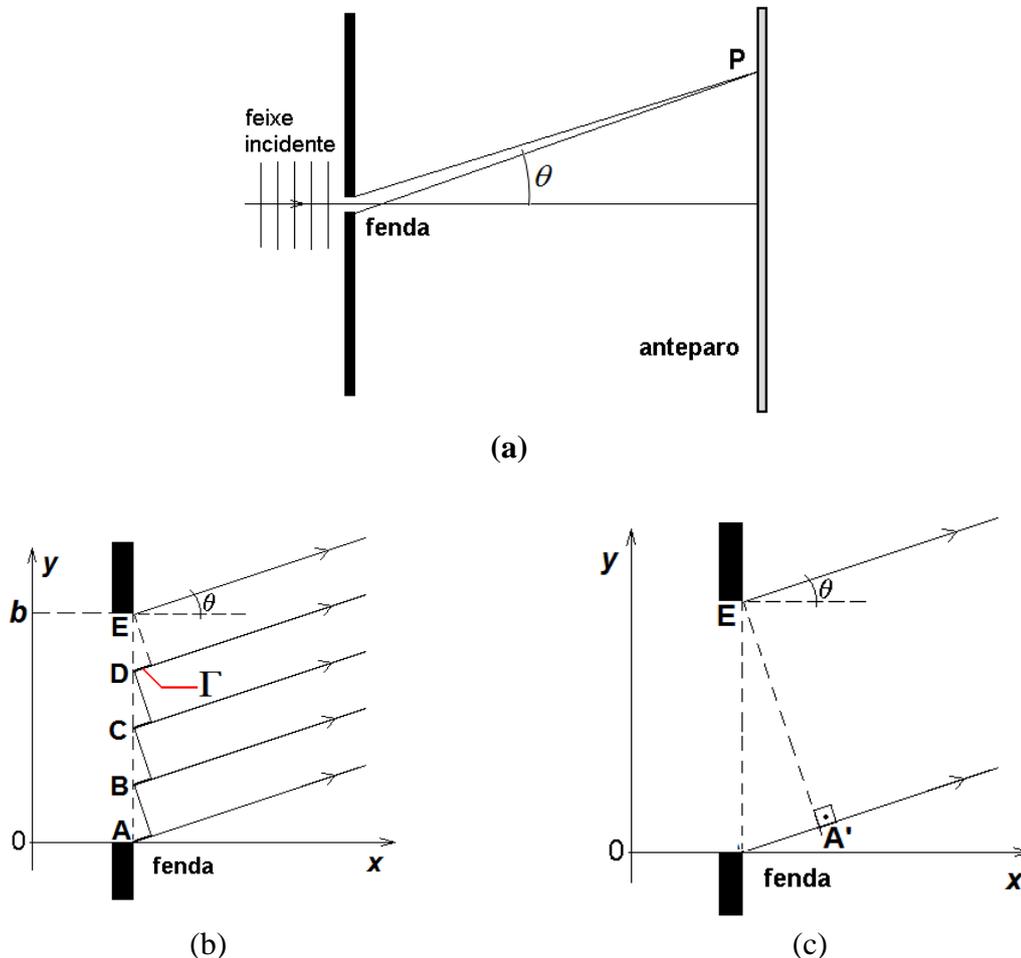


Figura 3.14: a- incidência do feixe de onda plana sobre fenda simples, com padrão de difração projetado no anteparo; b- representação da diferença de caminho óptico Γ entre feixes que emergem da fenda

A figura 3.14b mostra um número finito de ondas emergindo da fenda, de forma que entre uma onda e outra há uma diferença de caminho óptico Γ que é finita. Dizemos que o espectro de diferenças de caminho óptico (e, portanto, de fase) é *discreto* neste caso, ou seja, os valores de Γ não variam de forma contínua, mas na forma de degraus. Devemos saber que a figura 3.14b não é realista, mas apenas uma representação simplificada do fenômeno. Na realidade, de acordo com o princípio de Huygens, há um número infinito de ondas emergindo da fenda, de forma que a diferença de caminho óptico e a diferença de fase varia continuamente ao longo da fenda. Assim, a equação (3.34) assume a forma integral:

$$E = \frac{E_0}{b} e^{i(kr-\omega t)} \int_0^b e^{iky \sin \theta} dy \quad (3.35)$$

O fator E_0/b é a razão entre a amplitude total da onda que emerge da fenda. Esta razão é igual à razão dE/dy para o campo elétrico na onda que passa por uma largura infinitesimal dy . Neste caso, tratamos a fenda como uma abertura unidimensional ao longo da direção y . A solução da integral

$$E = \frac{E_0}{b} e^{i(kr-\omega t)} \left(\frac{e^{ikb \sin \theta} - 1}{ik \sin \theta} \right)$$

Pela equação (3.4), escreve-se a intensidade luminosa no ponto P do anteparo:

$$\begin{aligned} I &= \frac{c\epsilon_0}{2} E^* E = \frac{c\epsilon_0}{2} \left(\frac{E_0}{b} \right)^2 \left(\frac{e^{ikb \sin \theta} - 1}{ik \sin \theta} \right) \left(\frac{e^{-ikb \sin \theta} - 1}{-ik \sin \theta} \right) \\ &= \frac{c\epsilon_0}{2} \left(\frac{E_0}{b} \right)^2 \left[\frac{2 - 2 \cos(kb \sin \theta / 2)}{k^2 \sin^2 \theta} \right]^2 \Rightarrow \\ I &= \frac{c\epsilon_0}{2} \left(\frac{E_0}{b} \right)^2 \frac{\sin^2(kb \sin \theta / 2)}{k^2 \sin^2 \theta / 2^2} \end{aligned}$$

Chamando a fase β de $\beta \equiv kb \sin \theta / 2 = (\pi/\lambda) \sin \theta$, chega-se à intensidade da luz difratada como

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \quad (3.40)$$

onde $I_0 \equiv c\epsilon_0 E_0^2 / 2$. A figura 3.16 ilustra o padrão de difração expresso na equação

(3.40) acima, em função da fase β . A parte central da função $I(\beta)$ é o chamado *máximo central*, e os demais máximos laterais são os chamados *máximos secundários*.

O máximo central ocorre para $\beta = 0$. A sua intensidade, muito superior aos máximos secundários, justifica-se pelo limite

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sin \beta}{\beta} = 1$$

e pelo fato de que 1 é o máximo valor da função $\sin^2 \beta / \beta^2$.

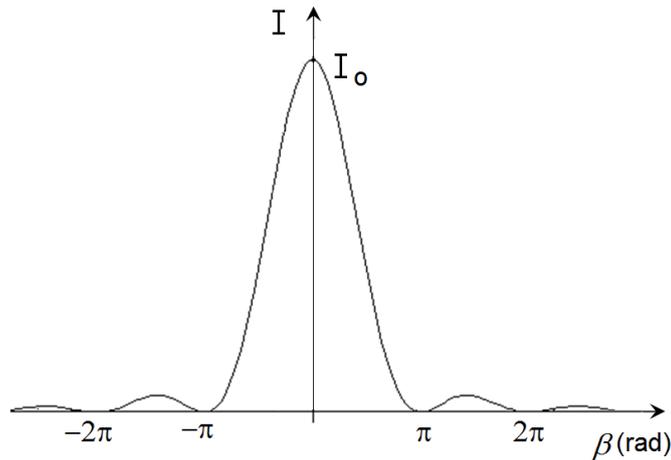


Figura 3.16: padrão de difração gerado por uma fenda simples de abertura b

Os mínimos de difração ocorrem para os valores de β para os quais $\sin\beta = 0$ na equação (18):

$$\beta = m\pi, \text{ para } m = \pm(1,2,3,\dots) \quad (3.41)$$

Da definição de β , $\beta \equiv kb\sin\theta/2$, e da equação (3.40), obtêm-se os ângulos para os mínimos de difração:

$$b\sin\theta = m\lambda \quad (3.42)$$

A figura 3.16 mostra que a função $\sin^2\beta/\beta^2$ decresce rapidamente para $|\beta| > 0$, de maneira que, quando a luz difratada por uma fenda é projetada sobre um anteparo, a intensidade do padrão de difração decresce acentuadamente para máximos secundários mais distantes do máximo central. Os valores de θ para os quais estes máximos são apreciáveis são, portanto, pequenos, de forma que a relação $\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta$ é válida. Substituindo $\sin\theta \approx Y/L$ na equação (3.42), podemos escrever a posição Y_m^- de um mínimo de ordem m no anteparo:

$$b \frac{Y_m^-}{L} = m\lambda \quad (3.43)$$

Na equação acima, $Y = 0$ no ponto O' mostrado na figura 3.16, onde o eixo de simetria OO' cruza o anteparo, e para o qual $\sin\theta = 0$.

Exercício resolvido 5 - Mostre que os máximos de difração por fenda simples podem ser obtidos através da equação $\beta = \text{tg}\beta$; b – obtenha graficamente as soluções desta equação, levando à relação $b \frac{Y_m^+}{L} \cong \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$, onde Y_m^+ é a posição de um máximo de difração de ordem m .

Solução: a) os valores de β que fornecem os máximos e mínimos da intensidade luminosa I do padrão de difração podem ser obtidos impondo-se a condição

$$\frac{dI}{d\beta} = 0,$$

Desta forma, pela equação (3.40), temos

$$\frac{dI}{d\beta} = 8I_0 \frac{\text{sen}\beta}{\beta} \frac{(\cos\beta \cdot \beta - \text{sen}\beta)}{\beta^2} = 0$$

Para determinar os valores de β que satisfazem a equação acima temos três opções, das quais apenas uma nos será útil. Por exemplo, quando $\text{sen}\beta = 0$, a equação é satisfeita, mas já vimos que este resultado nos leva aos mínimos de difração (equação 3.40); fazendo $\beta \rightarrow \infty$, também temos $\partial I / \partial \beta \rightarrow 0$, mas esta condição também não nos leva aos valores de mínimo da intensidade, apenas explica o decréscimo dos máximos de difração, como se pode ver na figura 3.16; por fim, se impusermos que o parênteses seja nulo, temos

$$\cos\beta \cdot \beta - \text{sen}\beta = 0 \Rightarrow \beta = \text{tg}\beta$$

b) A equação acima é transcendente, de forma que não pode ser solucionada analiticamente, apenas de forma gráfica ou numérica. A figura 3.17 mostra a solução gráfica desta equação, ao mostrar as funções $f_1(\beta) = \beta$ e $f_2(\beta) = \text{tg}\beta$. Os pontos marcados com “X” mostram os cruzamentos das duas curvas, para os quais $\beta = \text{tg}\beta$, portanto. Este cruzamentos ocorrem próximos das assíntotas da função $\text{tg}\beta$ (linhas pontilhadas verticais), para as quais $\beta = \pm 3\pi/2$, $\beta = \pm 5\pi/2$, $\beta = \pm 7\pi/2$, ...

Desta maneira, os valores de β que satisfazem a equação $\beta = \text{tg}\beta$ são:

$$\beta = 0 \text{ (máximo central)}$$

$$\beta \approx \pm 3\pi/2 \text{ rad (1º máximo)}$$

$$\beta \approx \pm 5\pi/2 \text{ rad (2º máximo)}$$

$$\beta \approx \pm 7\pi/2 \text{ rad (3º máximo), etc}$$

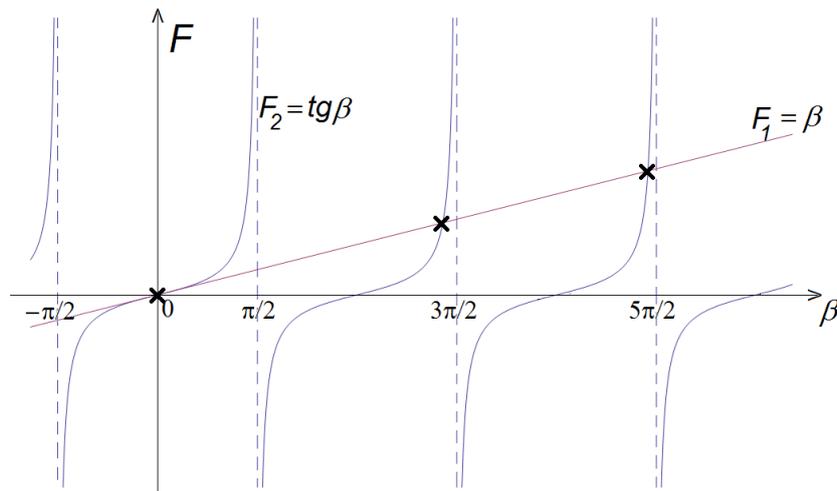


Figura 3.17

Desta forma, podemos escrever, de forma geral, os valores de β que maximizam a intensidade da luz difratada como

$$\beta \approx \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \text{ rad, onde } m = \pm (1,2,3,\dots) \quad (3.44)$$

Note a similaridade entre a equação acima e a equação (3.41): os valores de fase β para máximos e para mínimos diferem apenas de meia ordem (o termo $1/2$ da equação 3.44). Esta diferença de meia ordem entre um máximo e um mínimo vizinho aparece de forma recorrente em fenômenos de interferência e difração.

Da definição $\beta \equiv kbsen\theta/2$ e da equação (3.44) chega-se finalmente à expressão para as posições de máximo de difração no anteparo:

$$b \frac{Y_m^+}{L} \cong \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (3.45)$$

Exercício resolvido 6 - Um feixe de laser de He-Ne ($\lambda = 632,8 \text{ nm}$) colimado é difratado por uma fenda simples de largura $0,2 \text{ mm}$. O padrão de difração é projetado num anteparo a 3 m da fenda; a – calcule a distância entre o 3º mínimo e o 1º máximo secundário; b – mostre que a distância entre dois mínimos vizinhos do padrão de difração é $\Delta Y = \lambda L/b$, e que ela não depende da ordem das franjas; c – mediu-se a razão entre a intensidade de um determinado máximo de difração de ordem m e a intensidade do máximo de difração de ordem 1, como sendo aproximadamente $7,438 \times 10^{-2}$. Determine a ordem m deste máximo de difração.

Solução:

a – a equação (21) permite-nos calcular a posição do 1º mínimo de difração:

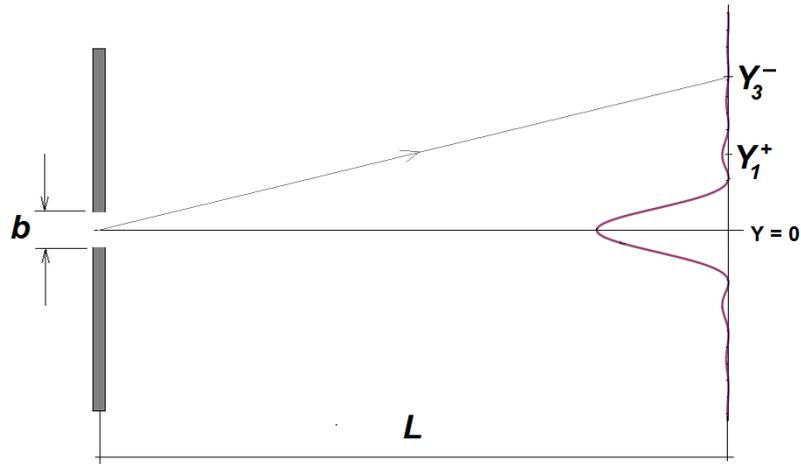


Figura 3.18

$$Y_m^- = m \frac{\lambda L}{b} \Rightarrow Y_3^- = 3 \frac{632,8 \times 10^{-9} \times 3}{2 \times 10^{-4}} = 2,85 \times 10^{-2} m = 2,85 \text{ cm}$$

A posição do máximo de ordem 1 é obtida através da equação (3.45):

$$Y_m^+ \cong \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda L}{b} \Rightarrow Y_1^+ \cong \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{632,8 \times 10^{-9} \times 3}{2 \times 10^{-4}} = 1,42 \times 10^{-2} m = 1,42 \text{ cm}$$

Assim, temos

$$Y_3^- - Y_1^+ = 1,42 \text{ cm}$$

b – Um mínimo de ordem m tem a sua posição no anteparo dada por $Y_m^- = m \lambda L / b$, enquanto que um mínimo adjacente tem sua posição dada por $Y_{m+1}^- = (m+1) \lambda L / b$. Assim, a distância entre dois mínimos vizinhos pode ser escrita como

$$\Delta Y^- = Y_{m+1}^- - Y_m^- = (m+1) \frac{\lambda L}{b} - m \frac{\lambda L}{b} = \frac{\lambda L}{b}$$

Note que a distância $\lambda L / b$ independe de qualquer ordem de difração, o que significa que os mínimos (e também os máximos) de difração são equidistantes.

c – De acordo com a equação (3.40), a intensidade do máximo de ordem m pode ser escrita como

$$I_m = 4I_0 \frac{\text{sen}^2 \beta_m}{\beta_m^2},$$

como $\beta_m \approx \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi$, a equação acima toma a forma

$$I_m = 4I_0 \frac{\text{sen}^2\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi\right]}{\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi\right]^2} = \frac{4I_0}{\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi\right]^2}, \text{ pois } \text{sen}^2\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi\right] = 1, \text{ se } m \text{ é inteiro.}$$

Da mesma forma, a intensidade do primeiro máximo ($m=1$) será

$$I_1 = 4I_0 \frac{\text{sen}^2\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right)\pi\right]}{\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right)\pi\right]^2} = \frac{4I_0}{\frac{9}{4}\pi^2}$$

A razão entre o máximo de ordem m e o máximo de ordem 1 é $7,438 \times 10^{-2}$; desta forma,

$$\frac{I_m}{I_1} = \frac{4I_0}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \frac{9/4 \pi^2}{4I_0} = \frac{9}{4} \frac{1}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2} = 7,438 \times 10^{-2} \Rightarrow m = 5$$

Como esperado, a ordem m é um número inteiro.

Por abertura circular – consideremos a incidência de luz com frente de onda plana sobre uma abertura circular de diâmetro D mostrada na figura 3.19, e a projeção do padrão de difração resultante em um anteparo a uma distância L do furo, tal que $L \gg D$. O padrão luminoso da luz difratada pode ser dado por

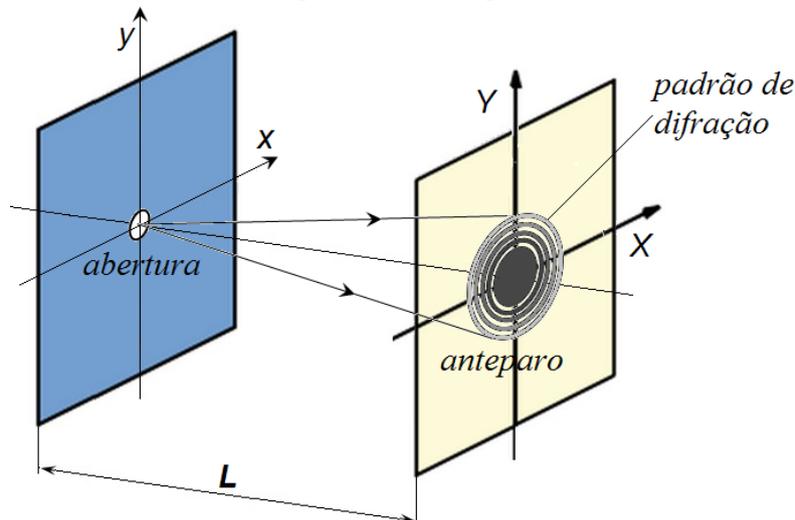


Figura 3.19

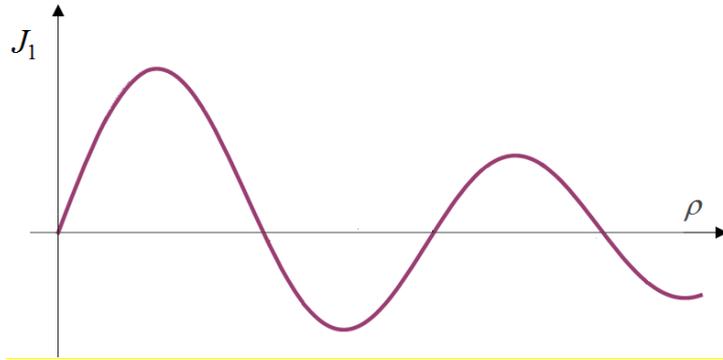
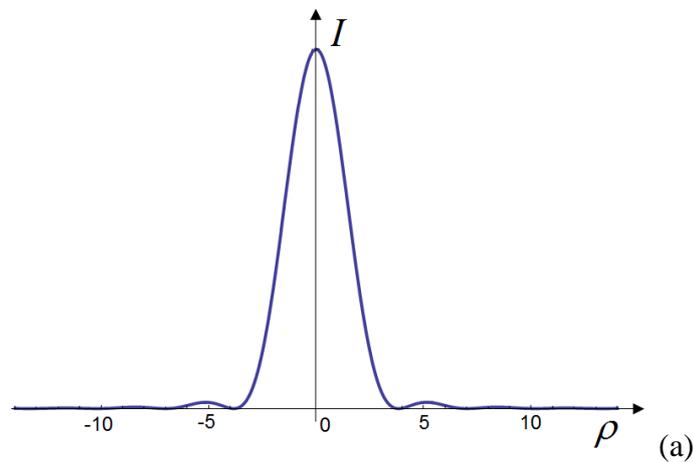


Figura 3.20

$$I = I_0 \frac{J_1^2(\rho)}{\rho^2}, \quad (3.45)$$

onde $J_1(\rho)$ é a função de Bessel de ordem 1, mostrada na figura 3.20, $\rho \equiv kD \sin \theta / 2$ e $I_0 = c \varepsilon_0 E_0^2 / 2$ é a intensidade da luz que passa pela abertura circular. A dedução da equação (3.45) está além do escopo deste livro. A intensidade da luz difratada no anteparo em função de ρ está mostrada na figura 3.21a, enquanto que o padrão de franjas resultante é mostrado na figura 3.21b, ao lado da função de intensidade. A coordenada ρ é radial, de forma que o padrão de franjas resultante tem consequentemente simetria circular, composto por um disco central e por anéis concêntricos. As linhas pontilhadas da figura 3.21b mostram a correspondência entre as primeiras raízes da função de Bessel de ordem 1, de valor $\rho = \pm 3,83$, e o disco central do padrão de difração, conhecido como *disco de Airy*.



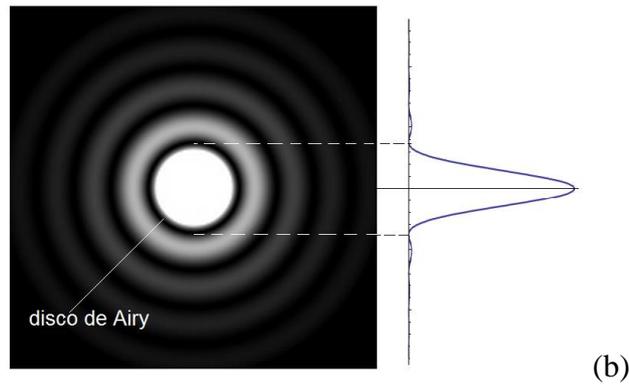


Figura 3.21

A figura 3.22 mostra que o disco de Airy constitui a base de um cone cujo ápice é a abertura circular, se considerarmos que o diâmetro da abertura é muito menor que o disco. A medida do ângulo θ ou do raio do disco de Airy pode ser bastante útil para a medida do diâmetro da abertura circular. Podemos determinar a relação entre θ e o tamanho do disco através do padrão de difração. Do valor $\rho = 3,83$ da primeira raiz positiva da função da intensidade luminosa da equação (3.45), e da definição $\rho \equiv kD \text{sen} \theta / 2$, temos

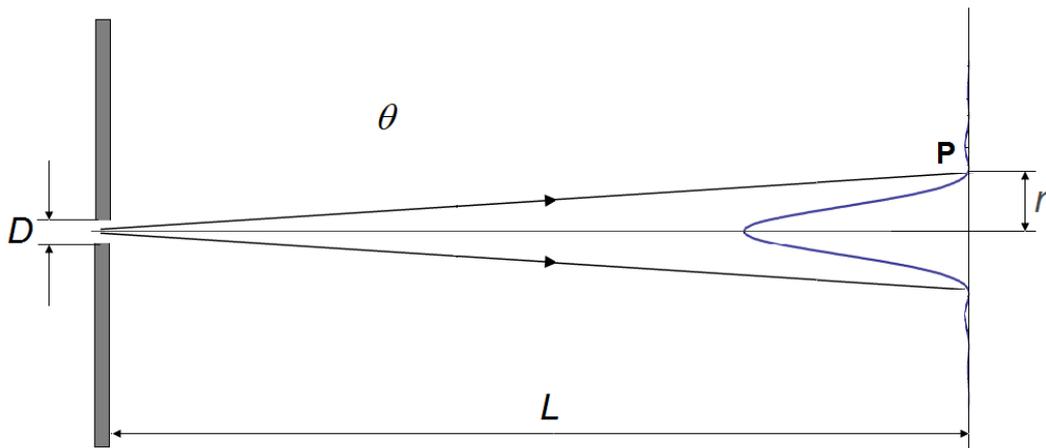


Figura 3.22

$$\rho = \frac{kD \text{sen} \theta}{2} = 3,83$$

Lembrando que $k = 2\pi/\lambda$, a equação acima toma a forma

$$\text{sen} \theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (3.46)$$

Da figura (3.22), vemos que $\text{tg} \theta = r/L \approx \text{sen} \theta$, e a equação (3.46) assume a forma

$$\frac{r}{L} \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}, \quad (3.47)$$

onde r é o raio do disco de Airy. As equações (3.46) e (3.47) são úteis para a medição do tamanho de microfuros e de partículas sólidas valendo-se do princípio de Babinet, e para a compreensão da influência da difração na resolução de imagens formadas por sistemas ópticos.

Difração por lentes/resolução de sistemas ópticos – como foi mencionado no início deste capítulo, a difração ocorre toda vez que a luz atinge um obstáculo, seja ele de amplitude, ou de fase. Obstáculos de fase têm por característica introduzir uma fase adicional à onda, sem necessariamente alterar sua amplitude. Um exemplo bastante importante deste fenômeno é observado quando a luz passa por uma lente, um elemento tipicamente de fase. A fase introduzida pela lente gera um processo de difração que exerce influência sobre a resolução da imagem formada.

Segundo a óptica geométrica, uma lente positiva converge os raios que emergem de um ponto no plano objeto a um único ponto no plano imagem, como mostra a figura 3.23a, se desprezarmos os efeitos de aberração geométrica. Entretanto, ao se levar em conta o fato de que a lente é também um elemento difrativo, constata-se que, no lugar de um ponto no plano imagem, o que se forma na verdade é um padrão de difração, com o disco de Airy ao centro, como se vê na figura 3.23b.

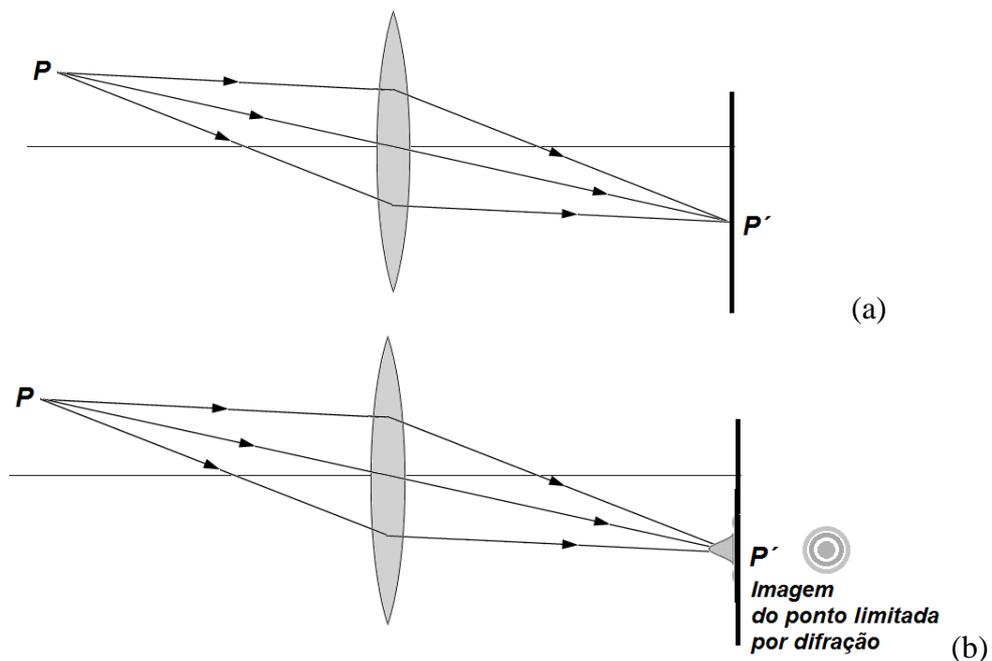


Figura 3.23

Como a grande maioria dos objetos é composta de pontos emissores ou espalhadores de luz incoerente, conclui-se que a imagem de qualquer objeto formada por um sistema óptico é na verdade uma sobreposição de discos de Airy. Desta forma, a resolução da imagem é limitada pelo tamanho do disco: quanto menor o disco de Airy, maior é a resolução da imagem, e vice-versa.

O tamanho do disco de Airy gerado por uma lente positiva de comprimento focal f , que produz uma imagem a uma distância s' desta pode ser obtido L da equação (3.47) por s' :

$$r = 1,22 \frac{\lambda s'}{D} \quad (3.48)$$

Quando o objeto encontra-se a uma distância infinita da lente, como é o caso dos telescópios, $s \rightarrow \infty$, de modo que $s' \rightarrow f$, e a equação (3.48) se converte em

$$r = 1,22 \frac{\lambda f}{D} = 1,22 \lambda f_{\#} \quad (3.49)$$

onde $f_{\#}$ é a abertura numérica (ou *f-number*) da lente, definida como a razão entre o comprimento focal e a abertura da lente. A equação acima mostra claramente como proceder para se extrair a máxima resolução possível de um instrumento óptico, tendo-se em mente que, quanto menor o valor do raio r do disco de Airy, mais alta é a resolução. Num telescópio, isso pode ser obtido usando-se uma lente objetiva de maior abertura D possível. Em microscopia é obviamente impossível construir objetivas de grandes diâmetros, de forma que a solução para diminuir o disco de Airy é utilizar fontes de luz que emitam o menor comprimento de onda possível, já que, pela equação (3.49), quanto menor for valor de λ , menor será o disco de Airy. Por este motivo, os microscópios eletrônicos utilizam feixes de elétrons no lugar de radiação eletromagnética e valem-se das propriedades ondulatórias dos feixes de partículas subatômicas.

Critério de resolução de Rayleigh – Lord Rayleigh propôs um critério para se definir o limite de resolução de um sistema óptico, com o intuito original de determinar a capacidade de telescópios astronômicos de resolver imagens simples, como um par de estrelas. Segundo Rayleigh, a menor separação angular entre duas estrelas de igual intensidade luminosa que ainda permite que ambas sejam distinguíveis uma da outra ocorre quando o máximo do padrão de difração de uma estrela coincide com o primeiro mínimo de difração da estrela vizinha. A sobreposição dos padrões de difração e a imagem resultante de ambas no limite de Rayleigh são mostradas na figura 3.24.

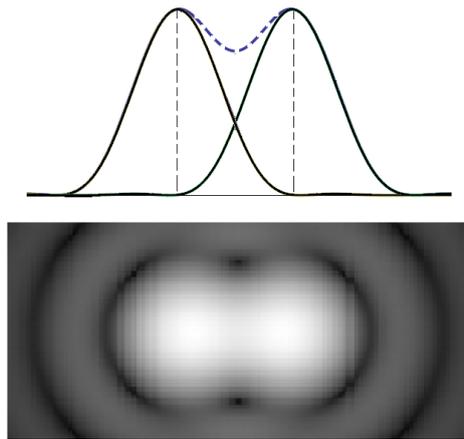


Figura 3.24

A figura 3.25 ilustra esquematicamente (e fora de escala) a formação de imagens de duas estrelas no limite de resolução de Rayleigh.

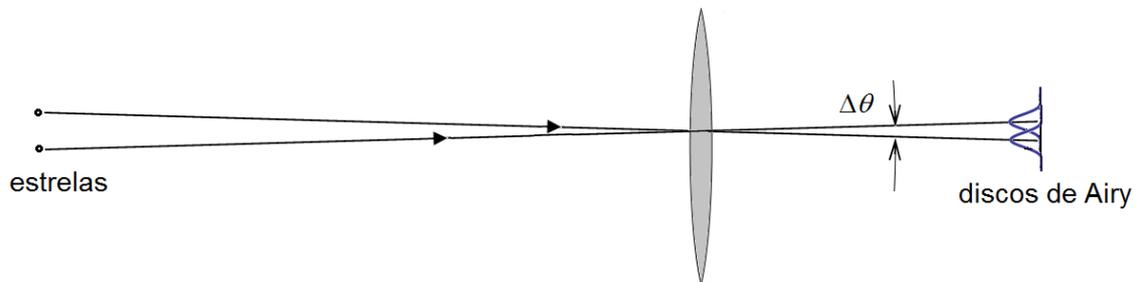


Figura 3.25

A figura 3.25 mostra que a separação angular $\Delta\theta$ é o mesmo ângulo θ que define o disco de Airy dado pela equação (3.46) e mostrado na figura 3.22. Desta forma, a separação angular mínima entre duas estrelas (ou pontos no infinito) resolvidas segundo o critério de Rayleigh é

$$\Delta\theta_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (3.50)$$

O *poder resolutivo* Δl_R de um sistema formador de imagens é definido como $\Delta l_R = s' \Delta\theta_{\min}$, de modo que, através da equação (3.50), toma a forma

$$\Delta l_R = 1,22 \frac{\lambda s'}{D}, \quad \text{ou} \quad \Delta l_R = 1,22 \frac{\lambda f}{D}, \quad (3.51),$$

para objetos localizados no infinito.

Exercício resolvido 7 : a - Calcule o limite de resolução angular do Telescópio de Trinta Metros no espectro visível, segundo o critério de Rayleigh; b – determine qual a distância entre dois objetos na Lua que podem ser resolvidos por este telescópio,

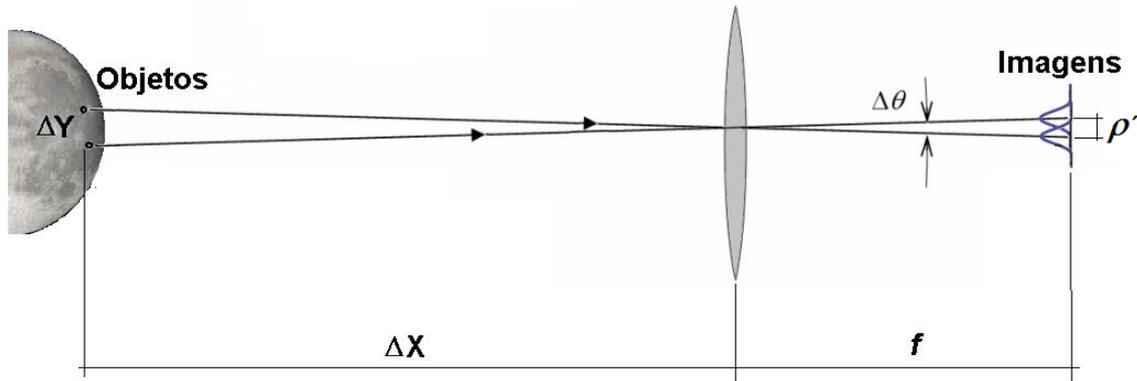
tratando estes objetos como pontos; c – faça este mesmo cálculo para o olho humano, com abertura da pupila de 3 mm. A distância Terra-Lua é $3,84 \cdot 10^5$ km, e considere $\lambda = 550$ nm.

Solução:

a – Tomamos o comprimento de onda de 550 nm, por situar-se no centro do espectro visível, e por ser o comprimento da onda luminosa à qual o olho humano é mais sensível. Da equação (42), temos

$$\Delta\theta_{min} \approx 1,22 \cdot 550 \cdot 10^{-9} / 30 = 2,24 \cdot 10^{-8} \text{ rad, ou } 4,6 \cdot 10^{-3} \text{ segundos de arco.}$$

b – A figura abaixo mostra que os objetos na estrela e os centros dos respectivos discos de Airy constituem dois triângulos isósceles semelhantes, por terem em comum o vértice localizado na lente. Esta relação de semelhança, nos permite escrever



$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\rho'}{f}$$

O lado ρ' é ao mesmo tempo o raio do disco de Airy e a distância entre os centros dos discos no limite de resolução de Rayleigh. Por este motivo, ΔY é a menor distância entre os objetos na Lua que podem ser resolvidos pelo telescópio TMT. Usando a razão ρ'/f dada pela equação (41), a equação acima toma a forma

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

Assim, temos

$$\Delta Y = 1,22 \frac{550 \times 10^{-9}}{30} \times 3,84 \times 10^8 = 8,6 \text{ m}$$

APÊNDICE: noções de números complexos

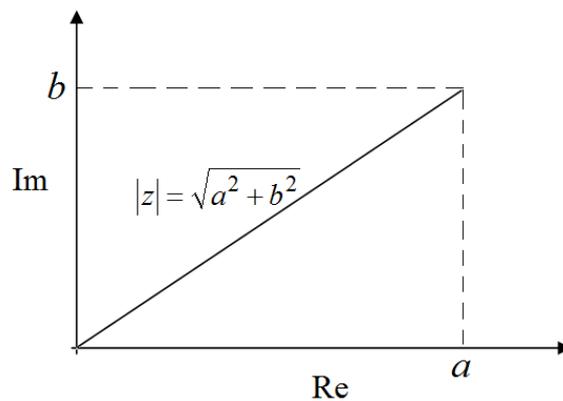
A forma mais geral de expressar um número *complexo* z é

$$z = a + ib ,$$

Onde i é dito como um número *imaginário*, ou seja, não real, definido como $i \equiv \sqrt{-1}$, e os coeficientes a e b são números reais.

A figura mostra como o número z pode ser representado no plano cartesiano. O coeficiente b é representado no eixo das ordenadas (eixo vertical, dos coeficientes que multiplicam o número imaginário) e o coeficiente a é representado no eixo das abscissas (eixo horizontal, dos números reais). O módulo de z corresponde ao tamanho da hipotenusa do triângulo retângulo mostrado na figura, cujos catetos medem a e b , podendo então ser obtido através do teorema de Pitágoras:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{A.1})$$



Figura

Ocorre que nem todo número complexo tem explicitamente a forma $a + ib$, de modo que a aplicação da relação $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nestes casos não é imediata. Para se contornar esta dificuldade, recorre-se ao *complexo conjugado*.

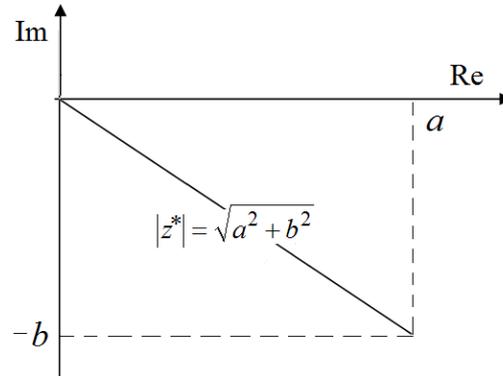
O complexo conjugado de z é definido como $z^* = a - ib$, ou seja, neste caso, o número complexo e o seu conjugado têm os coeficientes b de mesmo módulo, mas de sinais contrários. Como exemplo, abaixo são listados na tabela abaixo alguns números complexos e seus respectivos conjugados (a , b e c são reais):

$z_1 = a + bi$	$z_1^* = a - bi$
$z_2 = a - bi$	$z_2^* = a + bi$
$z_3 = \frac{a}{c + bi}$	$z_3^* = \frac{a}{c - bi}$

$z_4 = \frac{ai}{\sqrt{b-ci}}$	$z_4^* = \frac{-ai}{\sqrt{b+ci}}$
--------------------------------	-----------------------------------

Tabela 1

A figura abaixo representa o número z^* no plano cartesiano. Note que z e z^* têm módulos iguais.



Figura

O produto $z^* z$ apresenta uma propriedade importante:

$$z^* z = (a - ib)(a + ib) = a^2 + iab - iab - (ib)^2, \quad (\text{A.2})$$

Da própria definição do número i , tem-se o resultado $i^2 = -1$, de forma que a equação (2) acima toma a forma

$$z^* z = a^2 + b^2, \quad (\text{A.3})$$

ou seja, o produto do número complexo pelo seu conjugado fornece o quadrado do módulo de ambos:

$$z^* z = |z|^2 \quad (\text{A.4})$$

A forma de escrever o módulo através da equação (4) apresenta uma vantagem em relação à da equação (1). Enquanto esta exige que o número seja necessariamente expresso na forma $a + bi$, aquela admite formas diferentes, mais “exóticas” de se representar o número complexo.

Exercício resolvido – determine o módulo do número z_4 da tabela 1.

Solução:

De acordo com a equação (4), e lembrando que $i^2 = -1$,

$$|z_4| = (z_4^* z_4)^{1/2} = \left(\frac{-ai}{\sqrt{b+ci}} \frac{ai}{\sqrt{b-ci}} \right)^{1/2} = \left(\frac{a^2}{\sqrt{(b+ci)(b-ci)}} \right)^{1/2} \Rightarrow$$

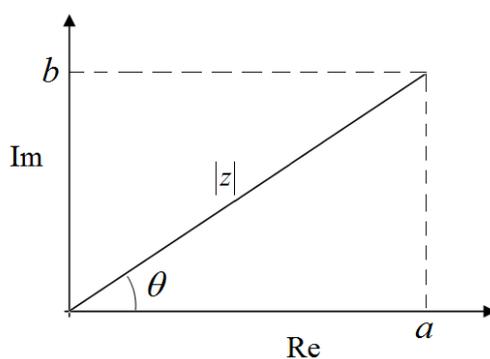
$$|z_4| = \left(\frac{a^2}{\sqrt{b^2 + c^2}} \right)^{1/2}$$

O número complexo pode ser também representado com o auxílio do sistema de coordenadas, mas na forma polar. Pela figura abaixo, pode-se obter $a = |z| \cos \theta$ e $b = |z| \operatorname{sen} \theta$, de forma que z será dado como

$$z = a + ib = |z| \cos \theta + i |z| \operatorname{sen} \theta, \quad (\text{A.5})$$

e o ângulo θ , de acordo com a figura, é dado por

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \right) \quad (\text{A.6})$$



Figura

Fórmula de Euler – esta identidade é expressa por

$$\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = e^{i\theta} \quad (\text{A.7})$$

Exercício resolvido – mostre que $|e^{i\theta}| = |\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta| = 1$

Solução: o cálculo do módulo de $e^{i\theta}$ é extremamente com o auxílio da equação 4:

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{e^{-i\theta} e^{i\theta}} = 1.$$

Também pela equação (4), obtemos

$$\begin{aligned} |\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta| &= \sqrt{(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)} = \\ &= \sqrt{\cos^2 \theta - i \operatorname{sen} \theta \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \operatorname{sen}^2 \theta} = \sqrt{\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta} = 1 \end{aligned}$$

Por estabelecer uma relação entre seno e cosseno, a fórmula de Euler mostra-se particularmente útil para expressar ondas eletromagnéticas.

Exercícios propostos

1) Considere a interferência de duas ondas monocromáticas $E_1 = E_0 e^{i(kx - \omega t)} e^{i\phi_1}$ e $E_2 = -E_0 e^{i(kx - \omega t)} e^{i\phi_2}$.

a) Calcule a intensidade resultante da interferência em função da diferença de fase ϕ entre ambas as ondas.

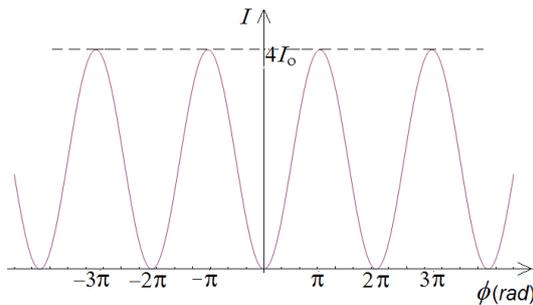
b) Esboce o gráfico da intensidade luminosa em função de ϕ .

c) Mostre que a interferência entre as ondas $E_1 = E_0$ e $E_2 = 4E_0 e^{i(\phi_2 - \phi_1)}$ fornece o mesmo resultado.

Respostas:

a) $I = 4I_0 \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$, onde $I_0 = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2$ e $\phi = \phi_2 - \phi_1$;

b)



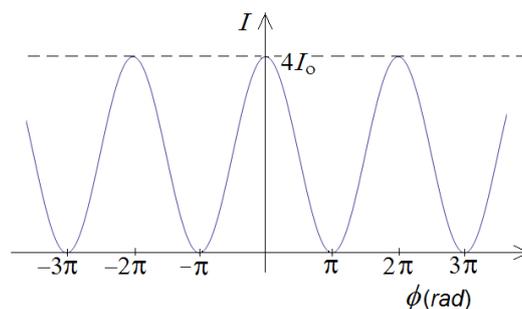
2) a) Calcule a intensidade resultante da interferência de duas ondas monocromáticas $E_1 = E_0 e^{i(kz - \omega t)} e^{i\phi_1}$ e $E_2 = iE_0 e^{i(kz - \omega t)} e^{i\phi_2}$ em função da diferença de fase ϕ entre ambas as ondas.

b) Esboce o gráfico da intensidade luminosa em função de ϕ .

Respostas:

a) $I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$, onde $I_0 = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2$ e $\phi = \phi_2 - \phi_1$;

b)



3) Numa experiência de fenda dupla, a distância entre as fendas é 0,5 mm e ambas distam 3 m do anteparo. Dois padrões de franjas podem ser vistos no anteparo, um gerado pela luz de comprimento de onda 480 nm e outro gerado por luz de comprimento de onda 600 nm.

a) Calcule a separação no anteparo entre os máximos de terceira ordem dos dois padrões de interferência.

b) Sobre uma das fendas coloca-se uma cuba de espessura $t = 1$ mm inicialmente à pressão atmosférica. A cuba é então pressurizada, de modo que observa-se o deslocamento de 10 franjas de interferência no anteparo. Calcule o índice de refração do ar pressurizado no interior da cuba. Considere $\lambda = 480$ nm neste item.

Respostas:

a) $\Delta Y = 2,9$ cm

b) $n = 1,0048$

4) Numa experiência de fenda dupla de Young, a distância entre as fendas é d e o comprimento de onda é λ . As fendas estão a uma distância L do anteparo sobre o qual o padrão luminoso resultante é projetado. Seja $L \gg d$.

a) Mostre que a distância entre duas franjas consecutivas no anteparo independe da sua ordem e é dada por $\lambda L/d$.

b) Uma lamínula de vidro ($n = 1,5$) de $150 \mu\text{m}$ é posicionada sobre uma das fendas. Calcule o deslocamento sofrido pelo padrão de franjas, se a luz utilizada tem comprimento de onda $\lambda = 632,8$ nm.

Resposta:

b) $\Delta m = 59,2$ franjas

5) Usa-se o princípio de interferência por fenda dupla de Young para a medida de deslocamentos. Uma fenda é mantida estática, enquanto outra é deslocada por meio de um translador. Com isso, a distância d entre as fendas pode ser variada. As fendas são iluminadas por um laser de diodo ($\lambda = 680$ nm). Inicialmente, a distância entre franjas é de 1,0 cm, quando iluminadas num anteparo a 3,0 m de distância. Quando uma das fendas é deslocada, nota-se que a distância entre as franjas passa a ser de 1,5 cm. Calcule o deslocamento imposto à fenda.

Resposta:

$$\Delta d = 68 \mu\text{m}$$

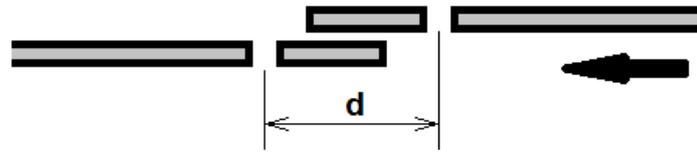


Figura 3.31

6) Da equação da luz transmitida $I_T = \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \delta} I_o$, e usando argumentos de conservação de energia:

a) Mostre que a luz refletida por um filme fino pode ser dada pela equação

$$I_T = \frac{4R \sin^2(\delta/2)}{1 + R^2 - 2R \cos \delta} I_o.$$

b) Se a fase δ é dada em função do ângulo de refração, do comprimento de onda, da espessura do filme e do seu índice de refração pela expressão $\delta = \frac{4\pi nd}{\lambda} \cos \theta'$, calcule a mínima espessura de um filme de índice de refração 1,6 que, em contato com o ar ($n_{\text{ar}} \approx 1$), seja antirrefletor para a luz amarela ($\lambda = 580 \text{ nm}$). Considere incidência normal. c)

Calcule o comprimento de onda no espectro visível para o qual a reflexão é máxima.

Respostas:

b) $d_{\text{mín}} = 181,25 \text{ nm}$

c) $\lambda = 387 \text{ nm}$

7) A luz branca apresenta, após ser refletida por uma bolha de sabão sob incidência normal, um máximo de interferência em 600 nm e um mínimo de 450 nm e sem nenhum mínimo entre estes. Supondo a película como uniforme, e se o seu índice de refração é 1,33, qual a sua espessura?

Resposta:

$$d = 338 \text{ nm}$$

8) Num arranjo de fenda dupla a distância entre as fendas é cerca de 100 vezes o comprimento de onda utilizado.

- a) Calcule a separação angular entre o primeiro e o segundo máximos.
 b) Calcule a distância linear entre o primeiro e o segundo máximo num anteparo colocado a 50 cm das fendas.

Respostas:

- a) $\Delta\theta = 0,57^\circ$
 b) $\Delta Y = 0,5 \text{ cm}$

- 9) A Figura 3.32 mostra uma cunha de vidro BK7 inserida em uma das fendas de um experimento de Young. Se o ângulo menor da fenda é 5° , calcule qual deve ser o deslocamento Δy ao longo da direção y para que se observe um deslocamento de 20 franjas de interferência projetadas num anteparo. Utiliza-se laser He-Ne na montagem.

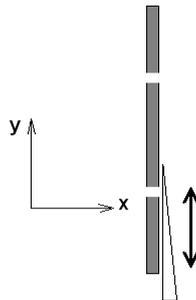


Figura 3.32

Resposta:

$\Delta y = 0,28 \text{ mm}$

- 10) A Figura 3.33 mostra uma microcuba transparente de espessura 2 mm inserida em uma das fendas de um experimento de Young. Quando ar pressurizado (pressão maior que 1 atm) é injetado na cuba, observa-se num anteparo um deslocamento de 200 franjas de interferência. Calcule o índice de refração do ar sob pressão dentro da cuba. Utiliza-se laser He-Ne na montagem.

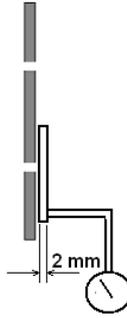


Figura 3.33

Resposta:

$$n = 1,06$$

11) A Figura 3.34 mostra o padrão de difração projetado sobre uma tela e gerado por uma determinada abertura, posicionada a 3 m da tela. Usa-se o laser He-Ne ($\lambda = 632,8$ nm). Determine:

- a forma da abertura;
- as dimensões da abertura.

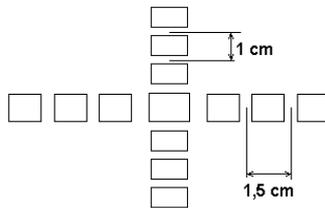


Figura 3.34

Respostas:

- Forma retangular
- Abertura horizontal = $127 \mu\text{m}$
Abertura vertical = $190 \mu\text{m}$

12) Numa experiência de difração por fenda única, mediu-se que a razão entre intensidade de um determinado máximo de difração de ordem N e a intensidade do máximo de difração de ordem 1 é aproximadamente $7,438 \times 10^{-2}$. Determine a ordem N desse máximo de difração.

Resposta:

$$N = 5$$

13) Um feixe de luz colimado de comprimento de onda 530 nm (luz verde) incide sobre uma fenda única de abertura 0,2 mm, e o padrão de difração é projetado numa tela a uma distância de 2 m.

- Calcule a distância entre o terceiro máximo e o primeiro mínimo no anteparo.
- A fenda é fechada para 0,1 mm. Comente o que ocorre com o padrão de franjas. Calcule a distância entre o terceiro máximo e o primeiro mínimo para esse caso.
- Para qual comprimento de onda o máximo de difração de ordem 4 iria coincidir com o máximo de difração de ordem 3 para luz verde?

Respostas:

a) $\Delta Y = 1,3 \text{ cm}$

b) A distância entre as franjas aumenta de forma geral.

$\Delta Y = 2,6 \text{ cm}$

c) $\lambda = 412 \text{ nm}$

14) Calcule o diâmetro do telescópio necessário para se resolver as imagens de duas estrelas que distam de 10^8 km e que estão a dez anos-luz da Terra. Considere $\lambda = 550 \text{ nm}$ e $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Resposta:

$D = 7,7 \text{ m}$

15) O telescópio European Extremely Large Telescope (E-ELT) terá um espelho de 42 m de diâmetro e comprimento focal 60 m, que será projetado de maneira a produzir imagens limitadas apenas por difração. Se o sistema deseja resolver imagens de duas estrelas que distam 100 anos-luz da Terra, calcule qual a máxima distância entre essas estrelas, considerando o critério de resolução de Rayleigh. Considere $\lambda = 580 \text{ nm}$.

Resposta:

$\Delta Y = 1,6 \times 10^{11} \text{ m}$

16) No experimento de difração por fenda simples com abertura b , usa-se luz com comprimento de onda λ , e a distância das fendas ao anteparo é L . A intensidade da luz difratada num anteparo sob um ângulo θ é dada pela expressão $I = I_o (\text{sen}\beta/\beta)^2$, em que $\beta \equiv (k b \text{sen}\theta)/2$. Obtenha:

- a expressão da posição Y dos *mínimos* de interferência no anteparo, em relação ao máximo central;

b) a expressão para a distância entre dois mínimos consecutivos em função de λ , L e b .

17) A luz branca apresenta, após ser refletida por um filme fino sob incidência normal, um mínimo de interferência em 300 nm e um mínimo de 600 nm, sem outro mínimo entre eles, como mostra o gráfico da intensidade da luz refletida em função do comprimento de onda. Supondo a película como uniforme, e se o seu índice de refração é 1,5, calcule a sua espessura.

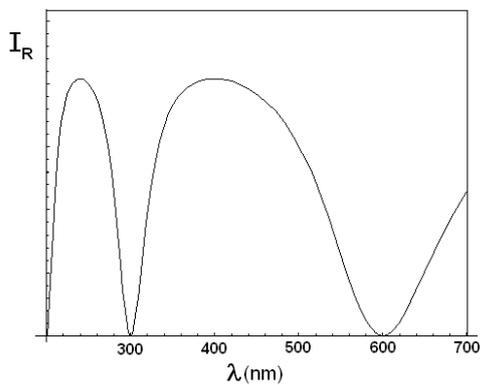


Figura 3.35

Resposta:

$$d = 100 \text{ nm}$$

18) O retângulo ao lado é feito de pequenos círculos brancos e pretos. Dois círculos pretos vizinhos distam entre si de 0,5 mm. Sua imagem é captada por uma câmera de altíssima resolução. Considerando-se que a resolução da imagem seja limitada por difração, calcule a mínima distância a partir da qual a câmera passa a captar a imagem com a coloração cinza, de maneira uniforme. A lente da câmera tem diâmetro 10 mm, e considere $\lambda = 550 \text{ nm}$.

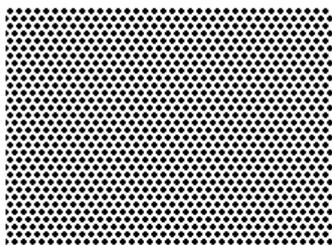


Figura 3.36

Resposta:

$$\Delta x = 7,4 \text{ m}$$