

2ª Lista de Óptica Técnica II – 2018

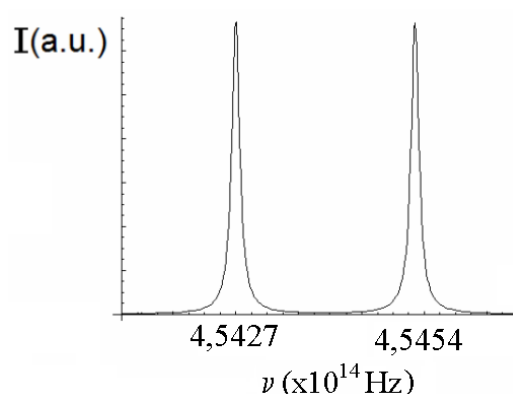
1 - Uma rede de difração tem 1000 linhas/mm. a – Supondo que toda a área da rede é iluminada, calcule a largura mínima necessária desta rede para resolver, em primeira ordem, dois modos de emissão de um laser He-Ne. A diferença entre as frequências dos modos é de 600 MHz, e o comprimento de onda central do laser é 632,8 nm.

2 - Um laser de diodo emite dois modos em torno de 670 nm. A distância espectral entre eles é 53 GHz. Usa-se uma rede de difração de 1200 linhas/mm para resolver estes modos. a – Calcule o diâmetro do feixe que incide sobre a rede para que os dois modos sejam resolvidos em 2ª ordem; b – Sobre esta mesma rede incide-se agora luz branca. Calcule qual comprimento de onda cuja difração em 3ª ordem coincide com a difração de 4ª ordem da luz azul (480 nm).

3 – Um laser, cujo espectro de emissão é mostrado ao lado, ilumina uma rede de difração de 600 linhas/mm.

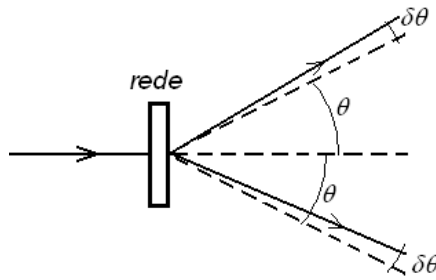
a – Calcule o mínimo diâmetro do feixe deste laser que deve incidir sobre a rede de difração, para que estas linhas espectrais sejam resolvidas;

b – Calcule a diferença angular entre estas linhas em 1ª ordem de difração.



4 - Uma rede de difração tem 1000 linhas/mm. a – Calcule o mínimo diâmetro do feixe que ilumina esta rede para resolver, em 1ª ordem, dois modos de emissão de um laser He-Ne. A diferença entre as frequências dos modos é de 600 MHz, e o comprimento de onda central do laser é 632,8 nm; b – É possível repetir este cálculo usando a terceira ordem de difração? Justifique sua resposta matematicamente; c – Num outro experimento, um laser incide sobre a rede fazendo um ângulo $\alpha = 2^\circ$ em relação à normal. O ângulo de difração medido para a segunda ordem é 30° . Calcule o comprimento de onda deste laser.

5 – Um aluno de Mecânica de Precisão usou uma rede de difração de parâmetro d para medir o comprimento de onda de uma fonte monocromática. Este aluno não alinhou a rede corretamente para garantir incidência normal. Consequentemente, ele mediu um comprimento de onda λ_1 para a ordem positiva, e um λ_2 , ligeiramente menor, para a ordem negativa. As direções das linhas difratadas estão mostradas abaixo. As linhas pontilhadas correspondem à luz difratada caso a rede tivesse sido corretamente alinhada. Mostre matematicamente que o comprimento de onda real pode ser obtido calculando-se a média aritmética de λ_1 e λ_2 , desde que o ângulo de desalinhamento seja pequeno.



6 – Considere luz linearmente polarizada incidindo sobre um arranjo de dois polarizadores. a – Desenhe um arranjo, e mostre matematicamente qual deve ser o ângulo entre os eixos dos polarizadores para que a luz que sai do sistema tenha polarização ortogonal à luz incidente. b -Mostre que a intensidade da luz que sai do sistema é dada por $I = (I_0/4) \sin^2(2\alpha)$.

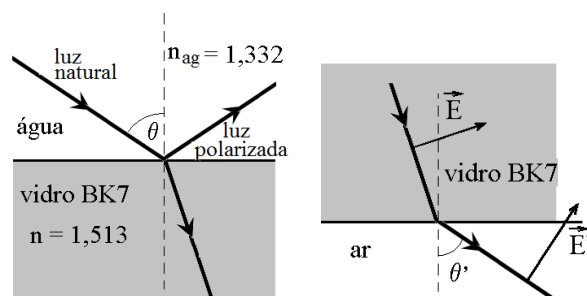
7 – Luz linearmente polarizada na vertical incide sobre três polarizadores. O primeiro tem um eixo de transmissão que faz um ângulo de 30° com a polarização incidente; o segundo, faz um ângulo de 30° com o eixo do primeiro (e um ângulo de 60° com a luz incidente). O eixo de transmissão do terceiro polarizador faz um ângulo de 20° com a vertical. Determine:

a - O ângulo total de rotação sofrido pela polarização da luz ao passar pelo conjunto de polarizadores;

b – A potência de saída da luz, se a potência da luz incidente é 100 mW.

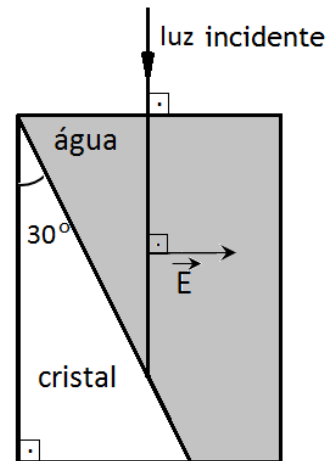
8 – a - Um feixe de luz verticalmente polarizada com intensidade 40 mW/cm^2 incide sobre um polaroide cujo eixo de transmissão faz um ângulo de 70° com a vertical. O feixe transmitido incide depois sobre outro polaroide cujo eixo de transmissão está na horizontal. Calcule a intensidade do feixe que emerge destes dois polaroides; b – repita o item a, para o caso de a luz incidente, de mesma intensidade, ser natural, isto é, não-polarizada.

9 – a) Na 1ª figura, luz natural incide sobre uma interface água-vidro BK7. Calcule qual deve ser o ângulo de incidência θ para que a luz refletida seja linearmente polarizada; b) Indique na figura qual a direção de polarização da luz refletida. c) Na 2ª figura, luz polarizada com campo elétrico paralelo ao plano de incidência incide sobre a interface vidro-ar. Neste caso, não se observa qualquer luz refletida, apenas luz refratada. Calcule o ângulo de refração θ' neste caso.



10 – a - Um feixe de luz verticalmente polarizada com intensidade 40 mW/cm^2 incide sobre um polaroide cujo eixo de transmissão faz um ângulo de 70° com a vertical. O feixe transmitido incide depois sobre outro polaroide cujo eixo de transmissão está na horizontal. Calcule a intensidade do feixe que emerge destes dois polaroides; b – repita o item a, para o caso de a luz incidente, de mesma intensidade, ser natural, isto é, não-polarizada.

11 - Um prisma feito de um cristal de alto índice de refração está imerso em água, de índice de refração 1,332, como mostra a figura. Um raio de luz incide normalmente à superfície da água, e sua polarização está contida no plano de incidência (plano do papel). Nota-se que não há luz refletida pelo prisma.



a – Sabendo-se que, quando há incidência sob o ângulo de Brewster os raios refratado e transmitido são perpendiculares entre si, mostre que

$$\tan \theta_B = \frac{n_{\text{cristal}}}{n_{\text{água}}}$$

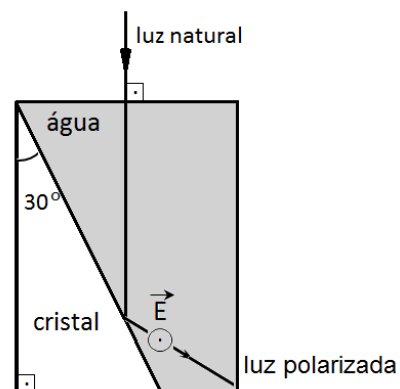
b- Calcule o índice de refração do cristal. A incidência ocorre sob o ângulo de Brewster? JUSTIFIQUE.

c – Calcule o ângulo de refração da luz que penetra no prisma;

d – determine a direção de polarização da luz refratada, pode ser por desenho.

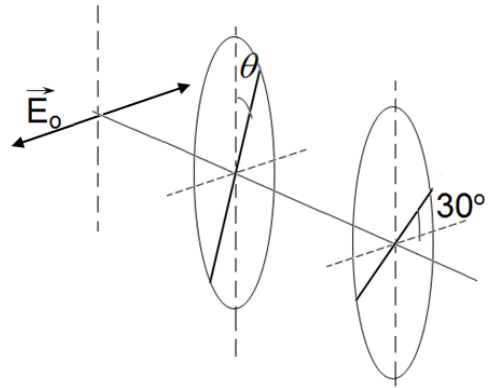
12 - Um prisma feito de um cristal de alto índice de refração está imerso em água, de índice de refração 1,332, como mostra a figura. A incidência da luz natural é normal sobre a superfície da água. A luz refletida pelo prisma propaga-se perpendicularmente à direção da luz incidente, e linearmente polarizada. A direção de polarização é perpendicular ao plano do papel, como mostra a figura.

Calcule o índice de refração do cristal.



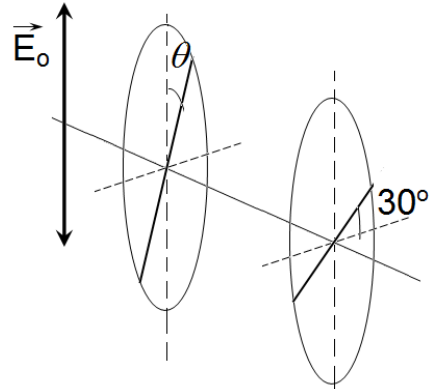
13 - Luz linearmente polarizada na horizontal incide sobre dois polarizadores, cujos eixos de transmissão estão mostrados na figura. Calcule:

- a - O ângulo θ (em relação à vertical) para o qual a transmissão é máxima através do conjunto;
 b - A intensidade da luz transmitida pelo conjunto, em função da amplitude E_0 .



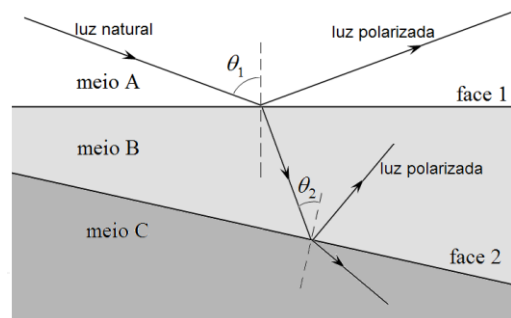
14 - Luz linearmente polarizada incide sobre dois polarizadores, cujos eixos de transmissão estão mostrados na figura. Calcule:

- a - O ângulo θ para o qual a transmissão é máxima através do conjunto;
 b - A intensidade da luz transmitida pelo conjunto, em função da amplitude E_0 .



15 - Um laser de largura espectral 50 GHz emitindo em torno de 650 nm é usado num interferômetro de Michelson. Calcule a maior diferença possível $L_1 - L_2$ entre os braços do interferômetro dentro da qual o padrão de interferência ainda pode ser observado.

16 - Um raio luminoso propaga-se no ar (meio A na figura, de índice de refração n_A) e incide sobre um prisma de vidro (meio B) em forma de cunha. O ângulo de incidência θ_1 é 57° e o ângulo entre as faces 1 e 2 do prisma é 15° . A luz refratada propaga-se pelo prisma de índice de refração n_B até incidir na sua face traseira. Esta face encontra-se em contato com outro meio óptico (meio C) de índice de refração n_C . Tanto a luz refletida pela face superior 1, quanto a refletida pela face inferior do prisma, são polarizadas linearmente. Se o índice de refração do ar é $n_A = 1$, calcule: a(1,5) os índices de refração do prisma e b(1,0) do meio C.

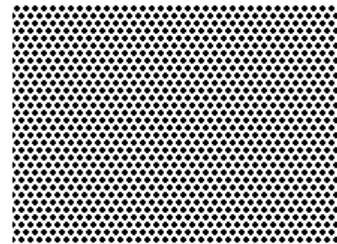


17 - Calcule o diâmetro do telescópio necessário para se resolver as imagens de duas estrelas que distam de 10^8 km e que estão a dez anos-luz da Terra. Considere $\lambda = 550$ nm e $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

18 - Cientistas alardearam o desenvolvimento de um sistema de aquisição de imagens de altíssima resolução, composto de um arranjo CCD e uma lente objetiva que forma a imagem. A CCD (charge coupled device), onde a imagem formada pela objetiva é projetada e captada, é um arranjo quadrado de 1 cm de lado, que possui 25×10^6 pixels também quadrados. O pequeno tamanho do pixel é responsável pela alta resolução do sistema, dizem os cientistas. A objetiva tem diâmetro 5 mm e comprimento focal 10 mm. Explique, justificando matematicamente, onde está a (grave) falha do sistema na captação de imagens no espectro visível, que limita a sua real resolução.

19 – O telescópio E-ELT (European Extremely Large Telescope) tem um espelho de 42 m de diâmetro foi projetado de maneira a produzir imagens limitadas apenas por difração. Se o telescópio deseja resolver imagens de duas luas de Saturno, que dista da Terra de $\sim 1,3 \times 10^9$ km, calcule qual a máxima distância entre estes satélites. Considere o critério de resolução de Rayleigh e $\lambda = 580$ nm.

20 – O retângulo ao lado é feito de pequenos círculos brancos e pretos. Dois círculos pretos vizinhos distam entre si de 0,5 mm e sua imagem é captada por uma câmera de altíssima resolução. Considerando-se que a resolução da imagem seja limitada por difração, calcule:



- a) A mínima distância a partir da qual a câmera passa a captar a imagem com a coloração cinza, de maneira uniforme. A lente da câmera tem diâmetro 10 mm, e considere $\lambda = 580$ nm;
- b) Qual deve ser o diâmetro da lente, para que esta distância mínima seja 25 m?

SOLUÇÕES COMENTADAS

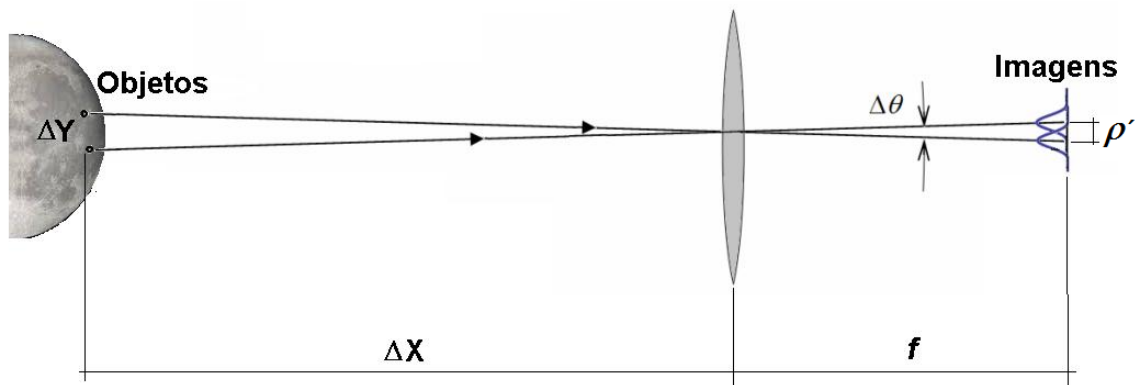
1 a - Calcule o limite de resolução angular do Telescópio de Trinta Metros no espectro visível, segundo o critério de Rayleigh; b – determine qual a distância entre dois objetos na Lua que podem ser resolvidos por este telescópio, tratando estes objetos como pontos; c – faça este mesmo cálculo para o olho humano, com abertura da pupila de 3 mm. A distância Terra-Lua é $3,84 \cdot 10^5$ km, e considere $\lambda = 550$ nm.

Solução:

a – Tomamos o comprimento de onda de 550 nm, por situar-se no centro do espectro visível, e por ser o comprimento da onda luminosa à qual o olho humano é mais sensível. Da equação (42), temos

$$\Delta\theta_{min} \approx 1,22.550.10^{-9}/30 = 2,24.10^{-8} \text{ rad, ou } 4,6.10^{-3} \text{ segundos de arco.}$$

b – A figura abaixo mostra que os objetos na estrela e os centros dos respectivos discos de Airy constituem dois triângulos isósceles semelhantes, por terem em comum o vértice localizado na lente. Esta relação de semelhança, nos permite escrever



$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\rho'}{f}$$

O lado ρ' é ao mesmo tempo o raio do disco de Airy e a distância entre os centros dos discos no limite de resolução de Rayleigh. Por este motivo, ΔY é a menor distância entre os objetos na Lua que podem ser resolvidos pelo telescópio TMT. Usando a razão ρ'/f dada pela equação (41), a equação acima toma a forma

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

Assim, temos

$$\Delta Y = 1,22 \frac{550 \times 10^{-9}}{30} \times 3,84 \times 10^8 = 8,6 \text{ m}$$

2 - Numa experiência de interferometria *speckle*, usa-se um arranjo CCD quadrado de área 8 mm x 8 mm com 16 MePixels, também quadrados. Como fonte de luz utiliza-se um laser de He-Ne e uma lente de comprimento focal 50 mm para coletar a imagem. Determine qual deve ser a abertura do diafragma posicionado em frente à lente para que o tamanho do grão de *speckle* ajuste-se ao tamanho do pixel.

Solução – em experiências de interferometria que projetam o padrão de *speckle* num arranjo CCD (*Digital Speckle Pattern Interferometry*, ou DSPI), uma superfície rugosa é iluminada por uma fonte de luz coerente. Em decorrência desta rugosidade, as ondas espalhadas pela superfície, por se propagarem em diferentes direções, sofrem processos locais de interferência construtiva e destrutiva. Como resultado deste fenômeno, a superfície iluminada surge coberta de grãos claros e escuros – relacionados à interferência construtiva e destrutiva, respectivamente. Este é o chamado efeito de granulado óptico, ou efeito *speckle*, que encontra inúmeras aplicações em metrologia óptica.

Quando a imagem da superfície é formada por uma lente, o tamanho da imagem de cada grão (que pode ser considerado um “ponto” no plano objeto) é determinado pela abertura da lente, ou seja, a imagem do grão de *speckle* é um disco de Airy. Na técnica de DSPI, a correspondência entre o tamanho do grão e o pixel (que é um sensor de luz unitário) do arranjo CCD é de fundamental importância para a análise do padrão de *speckle*.

Como o arranjo CCD é um quadrado formado por 16×10^6 pixels, cada lado do arranjo possui $N = \sqrt{16 \times 10^6} = 4 \times 10^3$ pixels. O tamanho d do lado de cada pixel quadrado será a razão entre o tamanho do lado L do CCD e o número N de pixels do lado, ou seja, $d = L/N = 8 \times 10^{-3} / (4 \times 10^3) = 2 \times 10^{-6} \text{ m} = 2 \text{ } \mu\text{m}$.

Portanto, para haver um casamento espacial perfeito entre o grão de *speckle* e o pixel, o primeiro deve ter raio igual a $1 \text{ } \mu\text{m}$. Pela equação (41), temos

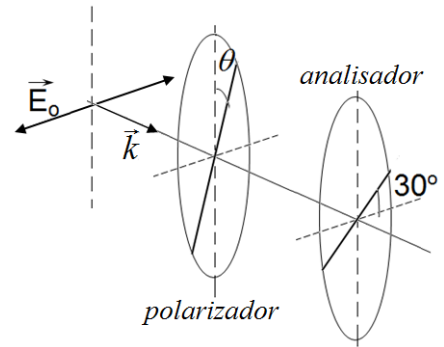
$$D = 1,22 \frac{\lambda s'}{\rho'} = 1,22 \frac{632,8 \times 10^{-9} \cdot 50 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-6}} = 3,86 \times 10^{-2} \text{ m} = 3,86 \text{ cm}$$

Esta abertura pode ser obtida posicionando-se um diafragma à frente de lente.

3 - Luz linearmente polarizada na horizontal incide sobre dois polarizadores, cujos eixos de transmissão estão mostrados na figura. Calcule:

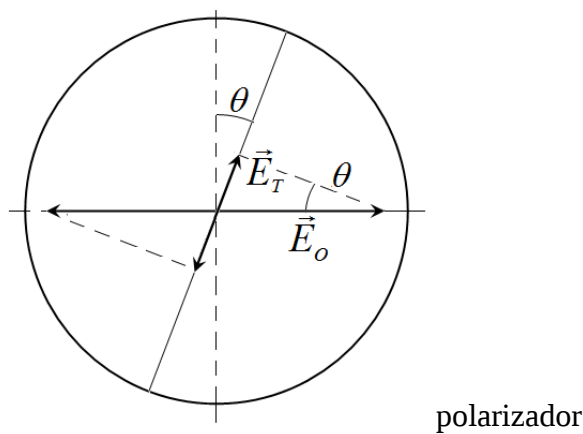
a – O ângulo θ (em relação à vertical) para o qual a transmissão é máxima através do conjunto;

b – A intensidade da luz transmitida pelo conjunto, em função da amplitude E_0 .



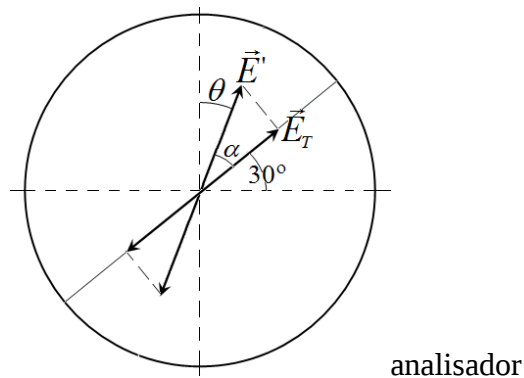
Solução:

a – A luz, ao passar pelo polarizador, terá amplitude que é paralela ao seu eixo de transmissão, conforme mostrado pelo desenho abaixo:



Pelo desenho acima, vê-se que o módulo E' do campo é oposto ao ângulo θ , no triângulo onde a hipotenusa vale E_0 . Desta forma, tem-se que a amplitude da luz transmitida pelo polarizador é

$$E' = E_0 \sin \theta$$



A amplitude E_T da luz transmitida pelo analisador pode ser obtida com o auxílio da figura anterior:

$$E_T = E' \cos \alpha = E_0 \sin \theta \cos \alpha$$

Como $\alpha = 60 - \theta$, chega-se à amplitude da luz transmitida como

$$E_T = E_0 \sin \theta \cos(60 - \theta)$$

Quando a amplitude da luz transmitida é máxima, a sua intensidade também é máxima. Desta maneira, o valor de θ para o qual a intensidade é máxima pode ser obtido impondo-se a condição $\partial E_T / \partial \theta = 0$:

$$\frac{\partial E_T}{\partial \theta} = E_0 \{ \cos \theta \cos(60 - \theta) + \sin \theta [\sin(60 - \theta)] \} = 0$$

A soma entre chaves na relação acima tem a forma $\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a - b)$, na qual $a = \theta$ e $b = 60 - \theta$ de modo que chegamos, para valores de θ no primeiro quadrante, a

$$\cos(2\theta - 60) = 0 \Rightarrow 2\theta - 60 = 90 \Rightarrow$$

$$\theta = 75^\circ$$

b – a equação (1.22) relaciona a intensidade da luz com a amplitude de seu campo elétrico:

$$I_T = c \frac{\epsilon_0 E_T^2}{2} = c \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \sin^2 \theta \cos^2(60 - \theta) = c \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \sin^2 75 \cos^2(60 - 75) \Rightarrow$$

$$I_T = 0,87 c \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 = 0,87 I_0,$$

onde I_0 é a intensidade luminosa que incide no conjunto de dois polarizadores.

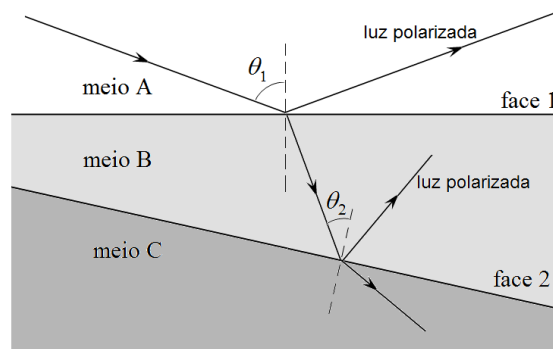
4 - um raio luminoso propaga-se no ar (meio A na figura, de índice de refração n_A) e incide sobre um prisma de vidro (meio B) em forma de cunha. O ângulo de incidência θ_1 é 57° e o ângulo entre as faces 1 e 2 do prisma é 15° . A luz refratada propaga-se pelo prisma de índice de refração n_B até incidir na sua face traseira. Esta face encontra-se em contato com outro meio óptico (meio C) de índice de refração n_C . Tanto a luz refletida pela face superior 1, quanto a refletida pela face inferior do prisma, são polarizadas linearmente. Se o índice de refração do ar é 1, calcule: a - os índices de refração do prisma e b - do meio C.

Solução:

a – Se a luz refletida pela face 1 é polarizada, conclui-se que θ_1 é o ângulo de Brewster na interface entre os meios 1 e 2.

Desta forma, da equação (1.46), podemos escrever

$$\frac{n_B}{n_A} = \tan \theta_B \Rightarrow n_B = n_A \tan \theta_1 = 1 \tan 57^\circ \Rightarrow n_B = 1,54$$



b – Como a luz refletida pela face 2 também é polarizada, vemos que θ_2 é o ângulo de Brewster entre os meios 2 e 3. Para determinar θ_2 , devemos calcular o ângulo de refração θ_1' , mostrado na figura abaixo. Este ângulo pode ser obtido pela lei de Snell na face 1:

$$n_A \sin \theta_1 = n_B \sin \theta_1' \Rightarrow \theta_1' = \arcsen \left(\frac{n_A}{n_B} \sin \theta_1 \right) = \arcsen \left(\frac{1}{1,54} \sin 57^\circ \right) \Rightarrow$$

$$\theta_1' = 33^\circ$$

O ângulo α , mostrado na figura abaixo, é complementar ao ângulo θ_1' , portanto $\alpha = 57^\circ$. A figura mostra no ponto P o cruzamento da reta normal à face 1 com a reta normal à face 2. O ângulo entre estas retas é o mesmo ângulo entre as duas superfícies, ou seja, 15° . O ângulo β entre a normal à face 2 e a face 1 é então $\beta = 90 - 15 = 75^\circ$. Como α , β e θ_2 são os ângulos internos de um triângulo, θ_2 é calculado a partir da soma

$$\alpha + \beta + \theta_2 = 180 \Rightarrow \theta_2 = 48^\circ$$

Aplica-se novamente a lei de Brewster (eq. 1.46), agora na face 2, para se determinar o índice n_C :

$$\frac{n_C}{n_B} = \tan \theta_2 \Rightarrow n_C = 1,54 \tan 48^\circ \Rightarrow n_C = 1,71$$

